

**ESTUDOS SOBRE COLAPSO DE POÇO DE PETRÓLEO DEVIDO À
VARIAÇÃO BRUSCA DA PRESSÃO INTERNA**

HELDER MAMEDE FROTA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF
DARCY RIBEIRO
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO - LENEP

MACAÉ - RJ
DEZEMBRO - 2011

ESTUDOS SOBRE COLAPSO DE POÇO DE PETRÓLEO DEVIDO À VARIAÇÃO BRUSCA DA PRESSÃO INTERNA

HELDER MAMEDE FROTA

Tese apresentada ao Centro de
Ciência e Tecnologia da Universidade
Estadual do Norte Fluminense Darcy
Ribeiro, como parte das exigências
para obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Reservatório e de
Exploração

Orientador: Wellington Campos, PhD.

MACAÉ - RJ
DEZEMBRO - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

F941e
2011

Frota, Helder Mamede.

Estudos sobre colapso de poço de petróleo devido à variação brusca da pressão interna / Helder Mamede Frota. --- Macaé: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo, 2011.

xvii, 87p. : il.

Orientador : Wellington Campos

Tese (Doutorado) em Engenharia de Reservatório e de Exploração.

Bibliografia : p.77-80

1. Engenharia de petróleo . 2. Oscilação da parede do poço – colapso do poço. 3. Modelo matemático. 4. Análise por diferenças finitas. I. Título.

CDD 622.338

ESTUDOS SOBRE COLAPSO DE POÇO DE PETRÓLEO DEVIDO À VARIAÇÃO BRUSCA DA PRESSÃO INTERNA

HELDER MAMEDE FROTA


Tese apresentada ao Centro de
Ciência e Tecnologia da Universidade
Estadual do Norte Fluminense Darcy
Ribeiro, como parte das exigências
para obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Reservatório e de
Exploração

Aprovada em 15 de dezembro de 2011


Comissão Examinadora:



André Leibsohn Martins (D.Sc., Eng. Petróleo - PETROBRAS)




Antônio Abel González Carrasquilla (D.Sc., Petrofísica– UENF/CCT/LENEP)



Arthur Martins Barbosa Braga (Ph.D., Eng. Mecânica – PUC-RJ)



Eduardo dos Santos Radespiel (Ph.D., Eng. Petróleo - PETROBRAS)



Wellington Campos (Ph.D., Eng. Petróleo-UENF/CCT/LENEP e PETROBRAS)
Orientador

À minha esposa Eveline Rodrigues Frota e aos meus queridos filhos Helder Mamede Frota Filho e Arthur Rodrigues Frota que me incentivaram a buscar um novo aprendizado e a tornar este projeto realidade.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, Supremo Criador, que tornou possível a realização deste trabalho, minha máxima homenagem e o meu mais profundo reconhecimento.

À minha mãe, Helena Mamede Frota, responsável pela minha alfabetização e ao meu pai, Francisco Mozart Cysne Frota, pela minha formação acadêmica. Por todo o apoio e incentivo, minha gratidão.

Ao orientador e professor Wellington Campos (PETROBRAS) pelo apoio durante todo o trabalho, pelo interesse, dedicação, críticas e sugestões na orientação desta Tese.

À PETROBRAS, que desde cedo soube valorizar e reconhecer o alcance deste trabalho. Por todo o apoio e compreensão quanto aos recursos necessários à realização deste projeto.

Aos professores da UENF/CCT/LENEP pela compreensão e incentivo durante todo o curso.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	x
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xvi
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 INTRODUÇÃO	1
1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	2
1.3 CAUSAS DO FENÔMENO.....	3
1.4 CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	6
1.4.1 Massa Específica x Peso Específico x Densidade	6
1.4.2 Pressão Hidrostática.....	7
1.4.3 Gradiente de Pressão.....	7
1.4.4 Tensão de Sobrecarga	7
1.4.5 Pressão de Poros	7
1.4.6 Tensão Efetiva.....	8
1.4.7 Pressão Estática e Dinâmica Exercida pelo Fluido de Perfuração	8
1.4.8 Falha das Rochas: Pressão de Fratura e Pressão de Colapso	9
1.4.9 Janela Operacional.....	10
1.4.10 Tensão Horizontal.....	10
1.4.11 Tensão Vertical Devido à Sobrecarga (Overburden)	10
1.4.12 Tensão Cisalhante ou Tangencial	11
1.4.13 Tensão Normal ou Tensão Principal.....	11
1.4.14 Critério de Falha de Mohr-Coulomb.....	12
1.4.15 Pressão de Quebra da Rocha	13
1.4.16 Propagação de Onda Elástica em Rochas	13

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	15
CAPÍTULO 3 – MODELO MATEMÁTICO DA OSCILAÇÃO DA PAREDE DO POÇO	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 VARIAÇÃO DE PRESSÃO	24
3.3 ONDA ELÁSTICA.....	25
3.4 MODELO MATEMÁTICO DA OSCILAÇÃO DA PAREDE DO POÇO.....	26
3.4.1 Premissas e Condições de Contorno.....	26
3.4.2 Desenvolvimento do Modelo Matemático – Equações.....	29
CAPÍTULO 4 – VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO.....	43
4.1 DEFINIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA.....	43
4.2 ANÁLISE DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DO DESMORONAMENTO DA PAREDE DO POÇO	45
CAPÍTULO 5 – ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO.....	55
5.1 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO E CONVENÇÕES DE SINAIS	59
CAPÍTULO 6 – ANÁLISE DOS RESULTADOS	62
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	73
7.1 CONCLUSÕES	73
7.2 RECOMENDAÇÕES.....	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77
ANEXO	81

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1.: Esquema de um Teste de Absorção ou <i>Leak-Off Test</i>	3
FIGURA 1.2.: Efeitos do fluido de perfuração nas paredes do poço	5
FIGURA 1.3.: Janela Operacional	10
FIGURA 1.4.: Estado de Tensões Originais	12
FIGURA 1.5.: Esquema do breakout ou ruptura das paredes de um poço	13
FIGURA 1.6.: Efeito do peso do fluido e da pressurização nas paredes do poço	14
FIGURA 3.1.: Esquema de propagação da onda P e S	26
FIGURA 3.2.: Esquema de um poço vertical submarino	28
FIGURA 3.3.: Esquema de trecho de um poço vertical	29
FIGURA 3.4.: Diagrama de corpo livre	31
FIGURA 3.5.: Diagrama de elemento infinitesimal ao redor do poço	32
FIGURA 3.6.: Seção transversal de um tubo de parede grossa.....	34
FIGURA 3.7.: Abaixamento da pressão dentro do poço	37
FIGURA 4.1.: Diminuição da pressão dentro do poço levando a uma diminuição do diâmetro e variação dinâmica das tensões ao redor do poço	44
FIGURA 4.2.: Queda de pressão abrupta na parede do poço	45
FIGURA 4.3.: Queda de tensão na parede do poço.....	46
FIGURA 4.4.: Esquema da parede do poço	47
FIGURA 4.5.: Discretização para um esquema numérico	51
FIGURA 6.1.: Deformação na parede do poço – queda 20% - 100 passos	64
FIGURA 6.2.: Tensão normal radial com queda de 20% - 100 passos	65
FIGURA 6.3.: Tensão normal circunferencial com queda de 20% - 100 passos.....	66
FIGURA 6.4.: Deformação na parede do poço – queda 20% – 500 passos	67
FIGURA 6.5.: Tensão normal radial com queda de 20% - 500 passos	68
FIGURA 6.6.: Tensão normal circunferencial com queda de 20% - 500 passos.....	69
FIGURA 6.7.: Deformação na parede do poço – aumento 20% - 100 passos	70
FIGURA 6.8.: Tensão normal radial com aumento de 20% - 100 passos	71
FIGURA 6.9.: Tensão normal circunferencial com aumento de 20% - 100 passos..	72

LISTA DE SÍMBOLOS

A lista de símbolos, em ordem alfabética, está dividida em alfabeto latino, alfabeto grego e acrônimos. Letras maiúsculas precedem as minúsculas.

Alfabeto Latino

C	constante de conversão do sistema de unidades
D	profundidade vertical, [L]
D_w	diâmetro do tubo ou do poço, [L]
E	módulo de elasticidade
ECD	densidade equivalente de circulação
F_i	forças superficiais devidas à pressão e forças internas, [M/(LT ²)]
G	gradiente de pressão
G	parâmetro elástico de Lamé
$H(x, t)$	altura piezométrica, [L]
K	módulo de <i>bulk</i> do fluido
L	comprimento da tubulação (ou poço), [L]
M	massa, [M]
P	pressão, [M/(LT ²)]
P_H	pressão hidrostática, [M/LT ²]
P_p	pressão de poros, [M/(LT ²)]
$P_{H\ mud}$	pressão hidrostática do fluido de perfuração, [M/(LT ²)]
P_{TF}	pressão total no fundo do poço, [M/(LT ²)]

P_{an}	pressão resultante das perdas de carga ao longo do anular do poço, [M/(LT ²)]
R	raio qualquer, externo [L]
R_w	raio do poço, [L]
R_∞	raio no infinito, [L]
T	tempo característico, [T]
T_f	tempo requerido para uma mudança completa na velocidade do fluxo, [T]
V	volume, [L ³]
V_p	velocidade da onda primária ou longitudinal, [L/T]
W	peso, [M]
a	velocidade da onda na água ou no fluido, [L/T]
a	aceleração, [L/T ²]
d	densidade, adimensional
e	espessura do tubo (ou poço), [L]
f	fator de fricção
g	constante gravitacional (gravidade), [L/T ²]
h	altura da coluna de fluido, [M]
m	massa, [M]
p_0	pressão dentro do poço igual a um valor inicial constante no instante t_0 , [M/(LT ²)]
p_w	pressão hidrostática no fundo do poço, [M/(LT ²)]
p_w	pressão hidrostática no interior do poço, [M/(LT ²)]
p_{wf}	pressão hidrostática final, radial na parede do poço, [M/(LT ²)]
p_{w0}	pressão hidrostática inicial no interior do poço, [M/(LT ²)]
$p_w(t)$	pressão no interior do poço, função raio r a um raio externo R , [M/(LT ²)]
r	distância em relação ao centro do poço, raio do ponto considerado, [L]
r_d	raio, adimensional
r_e	raio até uma grande distância do poço, não necessita ser infinito, [L]
t	tempo, [T]
t_d	tempo, adimensional

t_0	tempo inicial, [T]
u	deslocamento na direção de r , [L]
u_d	deformação, adimensional
v	velocidade do meio na posição r no tempo $t = 0$, [L/T]
v	deslocamento na direção de θ , [L]
v_d	velocidade, adimensional
$v(x, t)$	velocidade do fluxo, [L/T]
w	deslocamento na direção de z , [L]

Alfabeto Grego

ΔP	pulso de pressão máximo, [M/(LT ²)]
Δt	intervalo de tempo, [T]
Γ_{ij}	deformação tangencial, com $i \neq j$, [L]
γ	peso específico, [M/(LT) ²]
ε_{ij}	deformação normal, com $i \neq j$, [L]
λ	parâmetro elástico de Lamé
θ	ângulo, coordenada polar angular
ρ	massa específica de uma substância, formação ou rocha, considerada maciça, [M/L ³]
ρ_a	massa específica do ar, [M/L ³]
ρ_w	massa específica da água, [M/L ³]
σ	tensão total, [M/(LT ²)]
σ'	tensão efetiva, [M/(LT ²)]
$\bar{\sigma}$	tensor de tensões, [M/(LT ²)]
σ_H	tensão horizontal maior, [M/(LT ²)]
σ_h	tensão horizontal, isotrópica, genérica, perto ou longe do poço [M/(LT ²)]
σ_{hm}	tensão horizontal menor, [M/(LT ²)]
σ_{ov}	tensão de sobrecarga, equivalente a σ_z , [M/(LT ²)]
σ_r	tensão normal radial, sistema de coordenada cilíndrica, [M/(LT ²)]

σ_{rd}	tensão radial dinâmica, [M/(LT ²)]
σ_{θ}	tensão normal circunferencial ou tangencial , perpendicular ao raio do poço, sistema de coordenada cilíndrica, [M/(LT ²)]
$\sigma_{\theta d}$	tensão circunferencial ou tangencial dinâmica, [M/(LT ²)]
σ_z	tensão normal vertical devido à sobrecarga (<i>overburden</i>), sistema de coordenada cilíndrica, [M/(LT ²)]
τ_{ij}	tensões tangenciais, [M/(LT ²)]
τ_{ij}	tensões cisalhantes, [M/(LT ²)]

Acrônimos

B.C.S.	Bomba Centrífuga Submersa
C.I.	Condição Inicial
C.C.	Condição de Contorno
E.D.P.	Equação Diferencial Parcial
MATLAB	MATrix LABoratory, Matlab™, software comercial matemático, MathWorks
S.I.	Sistema Internacional de unidades

Conversão de Unidades

1 psi	= 6,894757	KPa
1 ft	= 0,3048	m
1 in	= 0,0254	m
1 lbm	= 0,4535924	Kg
1 psi/ft	= 22,62059	Kpa/m
1 lbf	= 4,44822	N
1 bbl	= 0,1589873	m ³

RESUMO

As questões relativas à geomecânica em ambientes de poços de petróleo, em muitos aspectos, são bem conhecidas na indústria e no meio acadêmico. Estas questões englobam desde pequenos problemas de estabilidade de poços, durante a perfuração, até casos mais graves como, por exemplo, as erupções catastróficas que podem levar desde o desmoronamento da parede do poço, a influxos indesejáveis até a perda total do poço.

Neste cenário, e considerando que os poços quase sempre apresentam problemas durante a perfuração, muitas instituições de pesquisa e as grandes operadoras vêm investindo, sistematicamente, no desenvolvimento de métodos para a previsão do comportamento da interface poço x rocha (formação). Mas, muitos aspectos relacionados ao comportamento das pressões exercidas pelos fluidos atuantes nas paredes do poço ainda carecem de estudos que expliquem a vibração que induz à expansão e contração da parede do poço. Este fenômeno corresponde a uma dilatação elastoplástica associada à propagação de ondas, que podem levar ao desmoronamento ou colapso da parede do poço.

Neste trabalho é realizada uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de levantar o que já é conhecido com relação a estes fenômenos de vibração da parede do poço. Não há registro do tratamento apropriado deste fenômeno na literatura com a abordagem sugerida neste trabalho.

O objetivo principal desta tese é analisar as equações e suas condições iniciais e de contorno que governam os mecanismos que ocorrem após a variação

brusca da pressão interna do poço, que poderá levá-lo a uma falha ou colapso parcial ou total. Neste caso, considera-se este fenômeno como sendo governado pela equação da onda em um meio elastoplástico, onde as paredes do poço de geometria cilíndrica vibram radialmente em uma determinada frequência e intensidade.

O desenvolvimento deste modelo matemático usa a equação da onda escrita em coordenadas cilíndricas e as condições iniciais de contorno.

Os resultados indicam a robustez do modelo matemático proposto na descrição dos fenômenos que ocorrem na parede do poço de petróleo depois de submetido a um diferencial brusco de pressão interna. Conclusões e sugestões para futuras pesquisas são apresentadas.

ABSTRACT

The issues related to geomechanics in a petroleum wellbore environment, in many aspects, are well known in the industry and in the academic environment. These questions comprise from small wellbore stability problems, during drilling, to extreme cases such catastrophic eruptions that could lead to the wellbore collapse or to an undesired influx from formation up to total well loss.

In this scenario, and considering that the majority of the wellbores face problems during drilling, many research institutions and major operators have been investing, systematically, on developing methods to predict the behavior of the interface wellbore x formation. Nevertheless, many aspects related to fluid pressure against the wellbore require a more accurate study to explain the vibration that causes the expansion and contraction of the internal surface. This phenomenon corresponds to an elastoplastic dilation associated to wave propagation which can cause wellbore collapse.

This work presents a bibliographical research including the most relevant studies on wellbore vibration dynamics. The literature shows that this phenomenon is not stressed enough. This way, the adopted approach and methodology used is unique.

This thesis seeks to analyze the equations and their initial and boundary conditions that govern the mechanisms that takes place after an abrupt variation of the internal wellbore pressure, that may lead to a fail or to a partial or total collapse. In this case, this phenomenon is considered as being governed by a wave equation

in an elastic medium, where the wellbore cylindrical internal surface vibrates radially in a determined frequency and intensity.

The development of this mathematical model uses the wave equation written in cylindrical coordinates, the initial and boundary conditions.

The results indicate the robustness of the mathematical modeling proposed describing the phenomenon that occur in the internal wellbore surface, after subjected to an abrupt internal pressure differential. Conclusions and suggestions for further researches are presented.

1. INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

As questões relativas à geomecânica em ambientes de poços de petróleo, em muitos aspectos, são bem conhecidas na indústria e no meio acadêmico. Estas abrangem desde pequenos problemas de estabilidade mecânica nas paredes de poços, durante a perfuração, até os casos mais graves como, por exemplo, os das erupções catastróficas, que podem levar desde o desmoronamento da parede do poço, a influxos indesejáveis e até a perda total do poço.

Neste panorama, considerando que os poços quase sempre apresentam problemas na perfuração, muitas instituições de pesquisa e grandes operadoras veem investindo, sistematicamente, no desenvolvimento de métodos para a previsão do comportamento da interface poço x rocha (formação) durante a etapa de perfuração. Mas muitos aspectos relacionados ao comportamento das pressões exercidas pelos fluidos atuantes na parede do poço ainda carecem de estudos que expliquem, por exemplo, a vibração induzida que leva à expansão e contração da parede. Este fenômeno corresponde a uma dilatação elastoplástica da parede do poço associado à propagação de ondas, que podem levar a desmoronamentos.

É importante ressaltar que este fenômeno, abordado neste trabalho, ocorre em um intervalo de tempo muito curto. Para períodos de tempos maiores, recomenda-se as necessárias adaptações, utilizando-se as equações de onda. A questão da fluência das rochas (*creeping*) não será objeto deste trabalho.

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

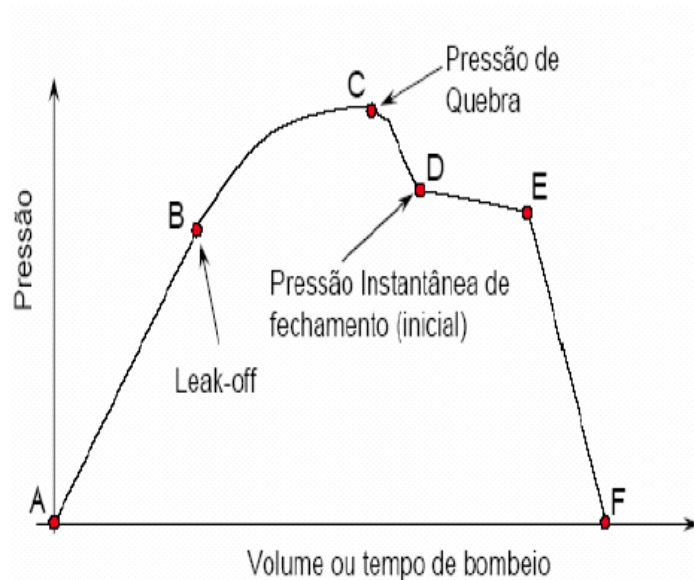
A dilatação elastoplástica da parede do poço, descrita como oscilação da parede do poço, provocada pelo aumento ou diminuição brusca da pressão interna, é o objetivo maior deste trabalho. Neste trabalho o autor desenvolve um modelo matemático deste fenômeno, utilizando as equações de equilíbrio e de compatibilidade da Teoria da Elasticidade, as equações constitutivas da rocha, supostas elásticas, e deduzindo a equação de onda para descrever o comportamento das paredes do poço, quando submetida a ciclos de pressão e despressurização.

A literatura não registra estudos deste fenômeno utilizando a abordagem da deformação das paredes do poço mediante ondas em poços de geometria vertical e direcional ou inclinado contendo fluido em seu interior. Os poucos estudos disponíveis relatam apenas casos isolados e específicos que não descrevem o fenômeno adequadamente. Isto ainda não foi suficientemente estudado, não existindo modelos matemáticos que reproduzam este comportamento. Pesquisadores, centros de pesquisa e algumas companhias de serviço desenvolveram estudos de ondas acústicas ao longo de poços e em suas vizinhanças para aplicação nas operações de perfilagens de poços. Mas, estas abordagens não descrevem a oscilação da parede do poço quando submetido às variações bruscas de pressão dos fluidos.

Todos estes fenômenos e suas respectivas deformações elastoplásticas induzidas serão modelados algebricamente e resolvidos por simulação numérica por meio da equação da onda. Portanto, o cenário, objeto deste estudo, considera uma situação onde uma onda se propaga radialmente em uma geometria cilíndrica: quando as bombas de fluido de perfuração da sonda são desligadas há uma queda brusca da pressão interna do poço para um valor próximo à pressão estática. No momento em que as bombas são religadas há um aumento brusco da pressão interna do poço. Isto pode ser facilmente observado em um gráfico de pressão *versus* tempo onde há um formato aproximadamente retangular equivalente à queda e ao aumento brusco da pressão interna do poço, causado por uma onda de pressão.

Além disto, este fenômeno também ocorre em mais duas situações práticas durante a fase de perfuração de poços:

- Em testes hidrostáticos, quando então as paredes dos poços são submetidas repentinamente a altas pressões e, logo depois, despressurizadas;
- Na execução dos chamados Testes de Absorção ou *Leak Off Tests*, que consistem de um gráfico de aumento de pressão dentro do poço *versus* o crescente volume de fluido bombeado. A pressão de absorção é definida no momento em que o aumento de pressão se desvia do comportamento linear de pressurização (Fig. 1.1).



– Gráfico típico de um teste de absorção estendido.

O intervalo A-B corresponde à compressão do fluido e à expansão elástica do poço.

O ponto B é o ponto de mudança do comportamento linear e uma pequena fratura estável é aberta. O intervalo B-C corresponde ao volume bombeado para crescimento da fratura inicial até ocorrer a quebra no ponto C onde uma queda brusca de pressão acontece.

No ponto D ocorre a pressão de fechamento instantânea da fratura e representa a tensão original no final da fratura. É um valor limite para tensão horizontal mínima original (estado de tensão não perturbado). O ponto E é a pressão de fechamento da fratura que é o valor mais correto da tensão horizontal mínima original.

Figura 1.1: Esquema de um teste de absorção ou *Leak-Off Test*. TOMASI e NABUCO (2007).

1.3 CAUSAS DO FENÔMENO

Na prática, este fenômeno é observado em rochas do tipo folhelho, que são formações impermeáveis. O fenômeno recebe diferentes nomenclaturas, como efeito balão (*ballooning*), respiração da parede do poço (*breathing formation*) ou simplesmente fenômeno de perda e ganho de fluido de perfuração, segundo ROCHA e AZEVEDO (2007a). Ainda segundo os autores, como não é encontrada na literatura uma distinção clara para a utilização destes termos, os mesmos serão definidos da seguinte forma:

- Efeito balão (*ballooning*): baseia-se em um comportamento elastoplástico da parede do poço. Neste caso, o fluido de perfuração em circulação gera uma pressão adicional que, imposta à parede de poço, provoca a sua dilatação. Quando as bombas da sonda, que mantêm o fluido de perfuração em circulação, são desligadas, o diâmetro do poço se contrai com o alívio da pressão, manifestando-se como um retorno deste fluido para dentro do poço. Este comportamento de expansão e contração também pode indicar a ocorrência de um influxo indesejado de fluido residente na rocha, como óleo, gás e água para dentro do poço (*kick*);
- Respiração da parede do poço (*breathing formation*): significa a “respiração” da parede do poço, isto é, o efeito do poço ganhar (inspirar) e retornar (expirar) fluido de perfuração em reação ao ato de ligar e o de desligar das bombas de fluido da sonda, respectivamente;
- Fenômeno de perda e ganho de fluido de perfuração: é ocasionado na constatação de perda e ganho de fluido de perfuração no poço.

Ainda, segundo ROCHA e AZEVEDO (2007b), estes dois últimos termos sugerem a ocorrência do mesmo efeito. Os autores afirmam que ao invés de uma dilatação elastoplástica da parede do poço, como no caso do efeito balão, o falso *kick*, neste caso, é originado pela abertura e fechamento de pequenas fraturas. Além destes efeitos, existe a alternância entre as pressões estáticas, bombas desligadas, e dinâmica, fluido em circulação, que geram deformações plásticas na parede do poço. Outro fenômeno comum que ocorre na prática é a variação de temperatura manifestada pelo resfriamento e aquecimento do fluido de perfuração. O fluido de perfuração ao circular no poço altera a temperatura das rochas expostas que formam a parede do poço. Ainda segundo ROCHA e AZEVEDO (2007c), estudos indicam que o resfriamento da parede do poço provoca uma redução do gradiente de fratura próximo ao poço enquanto que o aquecimento induz a um aumento deste gradiente. A situação mais crítica é a da combinação do efeito da variação de temperatura com a variação da pressão interna no poço. O fluido em circulação,

além de reduzir o gradiente de fratura com o resfriamento, aumenta a tensão radial dentro do poço. Esta conjunção de fatores poderá ultrapassar o valor de fratura, induzindo pequenas fissuras ou fraturas próximas ao poço. Além disto, o resfriamento também é responsável por uma redução na pressão de poros, sendo função do coeficiente de dilatação térmica do fluido. Com a interrupção da circulação do fluido, i.e. com as bombas da sonda desligadas, há a redução da tensão radial dentro do poço e o reaquecimento do fluido de perfuração, que leva ao aumento do gradiente de fratura.

Ainda, segundo os pesquisadores supracitados, os mecanismos apresentados ocorrem na perfuração de poços em águas profundas, em que a “janela” operacional entre a pressão de poros e de fratura é estreita e em poços de grande afastamento ou com altas inclinações, poços direcionais, e em perfurações de rochas com altos gradientes geotérmicos.

A figura 1.2 ilustra o efeito do fluido de perfuração nas paredes de um poço.

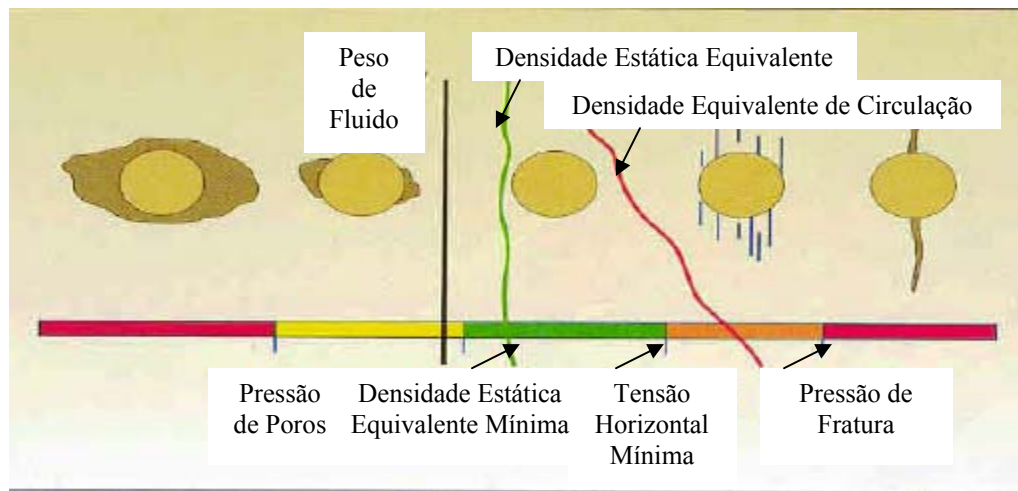


Figura 1.2: Efeitos do fluido de perfuração nas paredes do poço. TOMASI e NABUCO (2007).

1.4 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Para um melhor entendimento deste trabalho, faz-se necessário a definição de alguns conceitos fundamentais relacionados à dinâmica das pressões, tensões e esforços atuantes dentro do poço, isto é, na parede do poço e em suas vizinhanças. Além disto, alguns conceitos e equações matemáticas serão brevemente apresentados:

1.4.1 Massa Específica x Peso Específico x Densidade

Algumas propriedades dos fluidos e outros conceitos relevantes podem ser consultados em BRUNETTI (2005). Aqui se adota as seguintes definições:

Massa Específica (ρ): é a massa por unidade de volume de uma substância, podendo ser expressa em g/cm^3 .

$$(\rho) = \frac{\text{massa } (M)}{\text{volume } (V)} \quad (1.1)$$

Peso Específico (γ): é o peso por unidade de volume de uma substância, sendo que o peso é dado pela massa específica da substância multiplicada pela constante gravitacional, podendo ser expresso por KN/m^3 .

$$(\gamma) = \frac{\text{peso } (W)}{\text{volume } (V)} = \frac{\text{massa } (M) \times \text{gravidade } (g)}{\text{volume } (V)} \quad (1.2)$$

Densidade (d): é a razão entre a massa específica de uma substância e a massa específica da água ou do ar, sendo uma medida adimensional.

$$(d) = \frac{\text{massa específica } (\rho)}{\text{massa específica da água } (\rho_w) \text{ ou do ar } (\rho_a)} \quad (1.3)$$

1.4.2 Pressão Hidrostática

É a pressão resultante do peso da coluna hidrostática de um fluido, sendo dada por:

$$P_H = \rho \cdot g \cdot h \quad (1.4)$$

onde P_H é a pressão hidrostática, ρ a massa específica do fluido, g a constante gravitacional e h a altura da coluna de fluido.

1.4.3 Gradiente de Pressão

É a relação entre a pressão e sua respectiva profundidade de atuação. Na indústria do petróleo é geralmente denominado de peso de fluido equivalente ou somente peso de fluido, expresso em psi/ft ou KPa/m.

$$G = \frac{P}{C \cdot D} \quad (1.5)$$

onde G é o gradiente de pressão, P a pressão, D a profundidade vertical e C a constante de conversão do sistema de unidades.

1.4.4 Tensão de Sobrecarga

É a tensão exercida pelo peso de todas as camadas de rochas acima de um determinado elemento de rocha. Para uma discussão deste conceito, trivial na disciplina de Engenharia de Petróleo, consultar FJAER et al., (1992a) ou ROCHA e AZEVEDO (2006a).

1.4.5 Pressão de Poros

É a pressão do fluido contido nos espaços porosos da rocha. É comumente denominada de pressão da formação ou de pressão estática. Esta pressão, que atua

em todas as direções dentro dos poros de uma rocha, é utilizada para o dimensionamento do peso do fluido de perfuração. Segundo ROCHA e AZEVEDO (2006b), a ordem de grandeza da pressão de poros considerada normal equivale a uma coluna de água salgada de massa específica entre 8,5 a 9,0 lb/gal (1,02 a 1.08 g/cm³).

1.4.6 Tensão Efetiva

É a tensão real líquida aplicada diretamente na matriz da rocha, ou tensão intergranular, que corresponde à tensão total menos a pressão de poros.

Matematicamente, é expressa da seguinte forma:

$$\sigma' = \sigma - P_p \quad (1.6)$$

onde σ' é a tensão efetiva, σ a tensão total e P_p a pressão de poros.

1.4.7 Pressão Estática e Dinâmica Exercidas Pelo Fluido de Perfuração

A pressão estática corresponde àquela exercida pelo fluido de perfuração quando as bombas de circulação são desligadas, ou seja, é a pressão em condições de repouso.

Já a pressão dinâmica corresponde à pressão estática mais uma parcela imposta pelas perdas de carga do sistema de circulação da sonda. Esta parcela relaciona-se aos efeitos da fricção ao longo do poço e manifesta-se como uma parcela extra de pressão nas bombas para vencê-las.

ROCHA e AZEVEDO (2007d) apresentaram as seguintes equações para o cálculo destas pressões:

$$P_{H\ mud} = \rho \cdot g \cdot D \quad (1.7)$$

$$P_{TF} = P_{H\ mud} + P_{an} \quad (1.8)$$

onde $P_{H\ mud}$ é a pressão hidrostática do fluido de perfuração, ρ a massa específica média do fluido de perfuração, g a constante gravitacional, D a profundidade

vertical, P_{TF} a pressão total no fundo do poço e P_{an} pressão resultante das perdas de carga ao longo do anular do poço.

Um conceito prático bastante utilizado na indústria do petróleo para esta pressão é o de ECD (*Equivalent Circulating Density*) ou densidade equivalente de circulação, que é dado pela seguinte fórmula:

$$ECD = \rho_{mud} + \frac{P_{an}}{C \cdot D} \quad (1.9)$$

onde ECD é a densidade equivalente de circulação, P_{an} a pressão resultante das perdas de carga ao longo do poço e C a constante de conversão do sistema de unidades.

1.4.8 Falha das Rochas: Pressão de Fratura e Pressão de Colapso

Por definição a pressão de fratura é a pressão que leva à falha da rocha por tração e é causada na maioria das vezes pela pressurização do poço. Esta pressurização pode levar à ocorrência de fratura das rochas, com a conseqüente perda de fluido de perfuração e redução do nível de fluido no poço. No limite poderá ocorrer o *Kick*, que é o influxo indesejável de fluido da formação para o interior do poço. Segundo TOMASI e NABUCO (2007a), muitas vezes, erroneamente, a pressão de fratura é confundida com a tensão horizontal. Trata-se apenas de uma maneira de simplificar a análise. A pressão de fratura está relacionada com a tensão efetiva e com um critério de falha, como o de Mohr-Coulomb, por exemplo. A pressão de colapso leva à falha da rocha por cisalhamento, ou seja, por esforços de compressão, sendo originada pela redução da pressão interna do poço. Isto poderá causar a redução do diâmetro do poço, aumentando o torque na coluna de perfuração e levando à prisão da coluna. A pressão de colapso poderá levar ao desmoronamento parcial ou total das paredes do poço.

1.4.9 Janela Operacional

Trata-se do estabelecimento de limites inferiores e superiores para determinado parâmetro a ser medido ou monitorado. Isto implica na definição de intervalos de confiança ou de áreas ou “envelopes” para se trabalhar com um parâmetro dentro de uma margem de segurança aceitável. Na prática, devem-se acompanhar as pressões de poros, de fratura e de colapso para manter a integridade do poço.

A figura 1.3 ilustra uma janela operacional para o peso de fluido em função da profundidade e das fases de um poço.

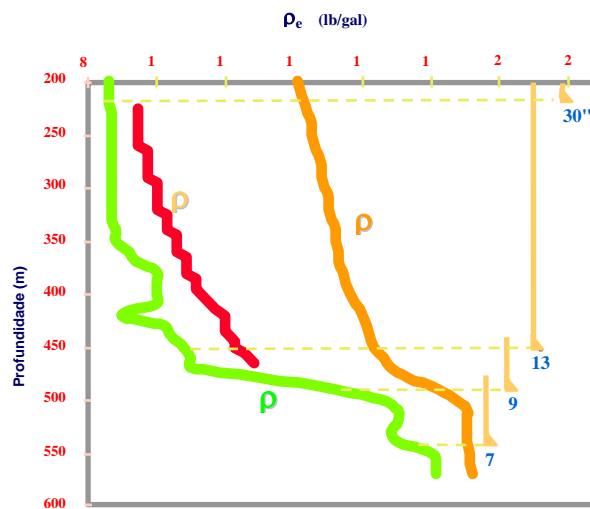


Figura 1.3: Janela operacional.

1.4.10 Tensão Horizontal

As tensões horizontais maior (σ_H) e menor (σ_{hm}) são decorrentes da reação ao carregamento vertical exercido pela tensão de sobrecarga, peso das camadas superiores, e por movimentos tectônicos posteriores.

1.4.11 Tensão Vertical Devida à Sobrecarga (*Overburden*)

É a tensão vertical exercida pelo somatório do peso de todas as camadas de rochas acima de um determinado elemento de rocha e é geralmente considerada igual à tensão de sobrecarga ou de *overburden*.

A pressão de sobrecarga é obtida pela integração da curva de densidade da rocha.

1.4.12 Tensão Normal Circunferencial

Por definição, são tensões perpendiculares ao raio do poço, designada por σ_θ . Neste caso, utiliza-se o sistema de coordenadas cilíndricas para representar o estado de tensões ao redor do poço. Quando um poço é perfurado, há uma alteração no estado de tensões original, com o sistema buscando um novo equilíbrio, levando assim a uma concentração do estado de tensões ao redor do poço. Caso o poço não seja preenchido com fluido de perfuração com o peso adequado, haverá uma concentração de tensões no poço com o aumento da tensão normal circunferencial. Portanto a presença do fluido de perfuração repõe parte do suporte que havia na rocha mediante um estado de tensão atuante na parede do poço. O estado de tensão em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo-z na direção vertical, pode ser representado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

onde as tensões cisalhantes são nulas e as tensões normais são, respectivamente, a tensão de sobrecarga, a tensão radial e a tensão circunferencial.

1.4.13 Tensões Principais

São as componentes de tensões normais de um estado de tensões dado em uma orientação para a qual as componentes de tensões tangenciais são nulas. A convenção utilizada em mecânica das rochas assume as tensões normais de compressão como positivas e as de tração como negativas, FJAER et al., (2008a).

A figura 1.4 ilustra o estado de tensões originais, em que o estado de tensão é descrito pelo tensor no sistema cilíndrico, representado em forma matricial por

$$\sigma_{original} = \begin{pmatrix} \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_H & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

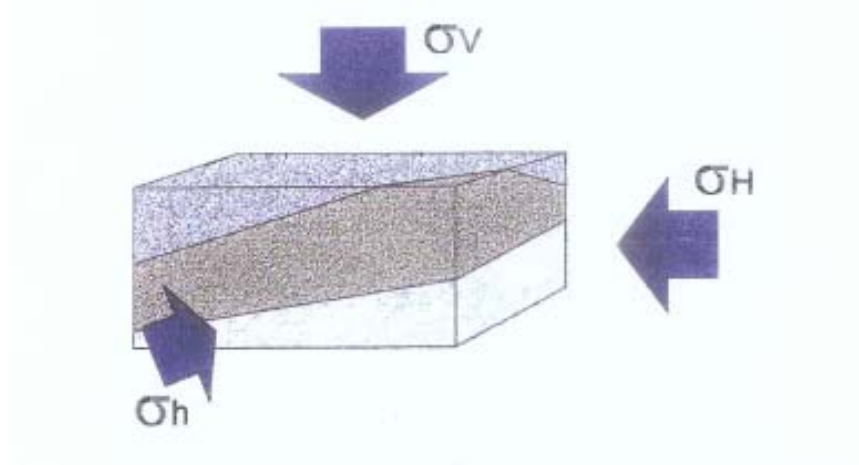


Figura 1.4: Estado de tensões principais originais em coordenadas cilíndricas.

1.4.14 Critério de Falha de Mohr-Coulomb

Um critério de falha é um modelo matemático para determinar em que estado de tensões a ruptura da rocha ocorrerá. A falha da rocha no poço poderá ocorrer por desmoronamento ou por fraturamento, a depender do peso de fluido de perfuração existente no interior do poço. Existem diversos critérios de falha na literatura, sendo os mais conhecidos os de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Griffith.

O critério de falha mais simples e mais utilizado na literatura é o de Mohr-Coulomb. Neste caso, para calcular as pressões críticas dentro do poço, nas quais haverá o limiar de ruptura por compressão ou fraturamento, é realizada uma varredura na parede do poço, variando a pressão e o ângulo θ , até se encontrar um estado de tensões que satisfaça o critério de falha de Mohr-Coulomb. A ruptura por desmoronamento é chamada de tensão de colapso inferior.

1.4.15 Pressão de Quebra da Rocha

Segundo TOMASI e NABUCO (2007b), em poços verticais a pressão de quebra ou de fraturamento da rocha será sempre superior à tensão horizontal mínima e, em poços inclinados, a rocha poderá se quebrar com valores inferiores à tensão horizontal mínima. Nesta situação, a rocha quebrará ao redor da parede do poço sendo que a fratura não se propagará. Além disto, poderá ocorrer o fenômeno da “respiração da formação” (*breathing*) definido anteriormente. Isto é devido ao fato de que em poços verticais a tensão de quebra é governada pela sobrecarga e em poços inclinados ou direcionais a tensão de quebra é governada pelas tensões horizontais.

A figura 1.5 ilustra um esquema da ocorrência de um *breakout*, ou ruptura das paredes do poço.

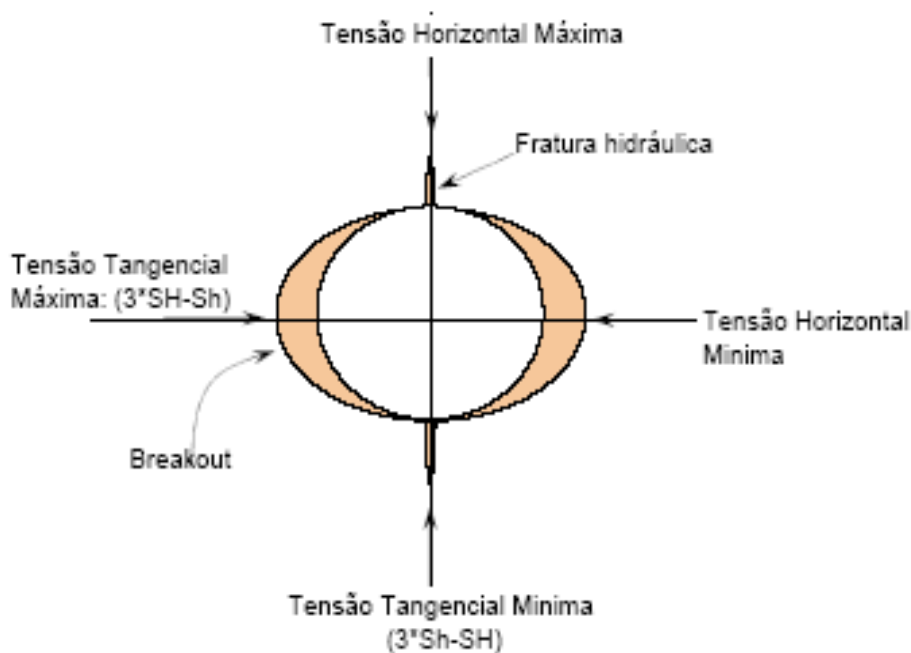


Figura 1.5: Esquema de como ocorre um *breakout* ou ruptura das paredes de um poço.

1.4.16 Propagação de Onda Elástica em Rochas

Segundo FJAER et al., (2008b), onda elástica é uma perturbação mecânica que se propaga através de um material.

Ondas elásticas no ar e na água são geralmente chamadas de ondas acústicas ou ondas sonoras. É importante destacar que estes termos são frequentemente utilizados em relação às ondas elásticas em rochas.

As ondas elásticas se propagam em rochas com uma determinada velocidade que é função da rigidez e da densidade da rocha. Estes parâmetros ainda dependem da porosidade.

Quando uma onda elástica passa através de uma rocha, cada parte desta rocha é forçada a entrar em um movimento oscilatório.

Neste trabalho, as vibrações provocadas pelas ondas elásticas nas paredes do poço, devido às variações bruscas de pressão interna, servirão para avaliar a possibilidade do colapso do poço.

Apenas para mostrar, de forma qualitativa, a figura 1.6 ilustra o efeito do peso do fluido e a pressurização nas paredes de um poço.

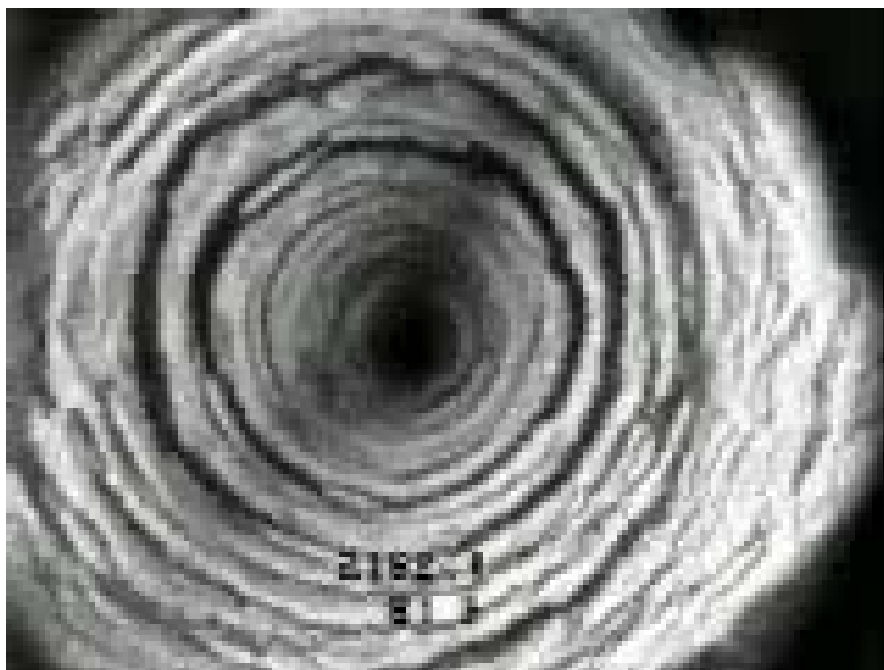


Figura 1.6: Efeito do peso do fluido e da pressurização nas paredes do poço.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica evidencia que o problema em questão ainda não foi analisado adequadamente, estando, portanto, em fase embrionária. Pode-se até mesmo afirmar que esta pesquisa é inédita. Ela atenderá a uma demanda de ordem prática da indústria do petróleo e também do meio acadêmico: o desenvolvimento de soluções numéricas para o problema da garantia de integridade do sistema poço aberto quando submetidos a pulsos bruscos de pressões. Na prática, isto se reveste de grande importância já que se trata de uma nova abordagem a ser considerada em projetos de construção de poços e que poderá evitar a chamada falha catastrófica, ou seja, aquela que poderá levar à perda do poço.

Vários pesquisadores se dedicaram ao estudo de determinadas áreas específicas, sendo que os trabalhos de alguns deles estão descritos a seguir.

Para esta pesquisa bibliográfica, foram consultados muitos artigos técnicos compreendendo diversas revistas especializadas, jornais de engenharia estrutural e civil, artigos das áreas de matemática aplicada, sísmica e geofísica, finalmente, artigos de pesquisa encontrados na internet. Além disto, foram também consultados livros e boletins técnicos. Cada um deles descreve, de alguma forma, um ponto em particular que servirá, juntamente com os demais, para o estudo do fenômeno e a elaboração do modelo matemático, objeto da tese.

MAURER e AIME (1965) publicaram um trabalho extenso sobre a mecânica dos esforços e falhas em rochas nas vizinhanças de um poço após diversos ensaios destrutivos, com foco nas tensões de cisalhamento sob pressão. Segundo os

autores, os mecanismos de colapso das rochas são complexos devido às heterogeneidades dos elementos constituintes das rochas, que por sua vez contém poros preenchidos com fluidos, microfraturas, descontinuidades elásticas e outras imperfeições. Por isto, hipóteses simplificadoras devem ser levantadas sem comprometer o objetivo do estudo.

ZHOU et al., (1996) apresentaram o conceito de mínimo esforço anisotrópico ao redor da parede de um poço inclinado. Neste estudo, uma abordagem elástica e analítica foi adotada para modelar os esforços atuantes em poços direcionais em diversos regimes de tensões. Neste caso, sugere-se que os poços devem ser perfurados em uma determinada direção e ângulo para favorecer a estabilidade do poço, levando-se em conta a questão da “janela operacional” da densidade do fluido de perfuração.

Há diversos relatos na indústria do petróleo em que algumas grandes operadoras, tais como a Chevron-Texaco e a Conoco-Philips, confirmaram a perda de diversos poços horizontais equipados com contenção de areia em reservatórios de óleo muito viscoso e equipados com BCS (Bombeio Centrífugo Submerso) (JIANG et al., 2007). Estes foram perdidos basicamente por colapso do trecho horizontal, devido ao excessivo diferencial de pressão ao religar os poços equipados com BCS. Neste caso ocorreu o colapso do poço e da tela de contenção de areia. Constatado que diversas combinações de fatores poderão colapsar o poço.

MORALES et al., (2000) abordaram o problema do colapso da parede de poços durante a produção de óleo, devido ao elevado diferencial de pressão ou *drawdown* e também após a falha e sua conseqüente propagação. Desta forma, os poços, ao serem pressurizados hidráulicamente, estarão sujeitos a sofrerem duas fraturas, diametralmente opostas, ao longo do eixo do poço nas zonas de maiores esforços de tração.

DANESHY (2005) afirmou que até aquela época, baseado no seu conhecimento, a literatura continha discussões muito limitadas referentes aos efeitos de fraturamento das formações e de estabilidade de poços abertos e revestidos. Os resultados indicaram que um alto diferencial de pressão brusco aplicado durante a produção poderá causar aberturas de extensas multi-fraturas resultando em deformações nos revestimentos ou o colapso do poço.

BIOT (1941) foi o primeiro pesquisador a introduzir a teoria da poroelasticidade das rochas. Posteriormente, diversos autores a reexaminaram sobre vários ângulos, buscando explicar outros mecanismos.

BIOT (1952a) foi também um dos primeiros pesquisadores que estudaram a propagação de ondas elásticas em um poço de forma cilíndrica contendo ou não fluido em seu interior imerso em um sólido elástico de dimensões infinitas. Ele tratou o problema somente em duas dimensões e calculou as curvas de dispersão.

DETOURNAY e CHENG (1988) analisaram as soluções para as questões relativas aos esforços, deslocamentos e pressões de poros induzidas pela perfuração de um poço e pela pressurização de um poço aberto. A formação, permeada por um fluido, foi considerada possuir um comportamento de um material poroelástico com constituintes compressíveis, seguindo a teoria de Biot, que trata da poroelasticidade, e em casos específicos a teoria dos esforços efetivos de Terzaghi aplicada ao início das falhas ao redor do poço. Diversos gráficos foram apresentados e um dos resultados indicou que alguns colapsos de poços realmente iniciam dentro da formação rochosa e não nas paredes dos poços.

STILKE (1959) obteve as soluções para a propagação de ondas elásticas na superfície de um túnel, simulando um poço, imerso em um meio perfeitamente elástico e tridimensional, homogêneo e isotrópico. Ele concluiu que as velocidades de fase e de grupo dependiam da relação entre o comprimento de onda e a circunferência do poço cilíndrico.

WHITE (1962) analisou soluções axialmente simétricas para propagação de ondas ao longo de um cilindro em um meio sólido elástico e infinito. As soluções encontradas descreviam a propagação de ondas não atenuadas ao longo do eixo em velocidades de fases maiores que as velocidades das ondas de cisalhamento e compressional.

ROSENBAUM (1974) pesquisou, numericamente, a propagação de pulsos sonoros ao longo de um poço cilíndrico e ao longo de uma interface plana em um meio poroso saturado por um único fluido. Ele afirmou que a permeabilidade do meio poroso afeta a atenuação do sinal somente em altas frequências.

CHENG et al., (1987) estudou a propagação de ondas *Stoneley* em um poço cilíndrico. Eles chegaram à conclusão que a velocidade da fase e a atenuação aumentam com a permeabilidade e porosidade, mas decrescem com o aumento da frequência.

SHARMA e GOGNA (1990) estudaram a propagação de ondas elásticas em um poço cilíndrico envolto por um meio sólido poroso e infinito saturado de fluido empregando as equações de Biot. Os autores derivaram as equações da dispersão de velocidade apropriada à propagação de onda em uma superfície em um meio poroso cilíndrico sólido contendo ou não fluido.

ARORA e TOMAR (2007a) estudaram a propagação de onda superficial ao longo da superfície de um poço cilíndrico vazio e contendo fluido em seu interior. Equações de dispersão foram derivadas em ambos os casos. Estas equações de frequência convergiram, em uma situação limite, para a equação de dispersão da onda de Rayleigh. Baseados nisto, utilizaram simulação numérica para geração de gráficos das curvas de dispersão das ondas superficiais e da velocidade das ondas de Rayleigh.

Finalmente, ainda segundo ARORA e TOMAR (2007b), diversos pesquisadores como CHENG e TOKSOZ (1981), PAILLET e WHITE (1982), KURKJIAN e CHANG (1986), PAILLET e CHENG (1986), TOMAR e KUMAR (1999), RAMA RAO e VANDIVER (1999) e BERGER et al., (2000) também estudaram problemas relativos à propagação de onda em poços. Recentemente, VASHISHTH e KHURANA (2005) estudaram a propagação de ondas ao longo de um poço perfeitamente cilíndrico envolto em um meio sólido poroso anisotrópico saturado por um fluido viscoso usando a teoria de BIOT (1952b). Eles concluíram que se o fator de anisotropia aumenta ou o poço é preenchido com fluido, a velocidade de fase da onda superficial também aumenta.

KHAFIZOV et al., (2009) avaliaram o problema da relaxação da pressão em um poço depois da sua despressurização rápida. Eles obtiveram como resultado uma equação integral descrevendo a evolução da pressão no poço. Normogramas foram elaborados para estimar a permeabilidade do meio poroso nas vizinhanças utilizando o meio-período da relaxação da pressão, com os parâmetros do poço. Foi levado em consideração o período de tempo durante o qual a diferença entre a pressão interna do poço e a pressão do meio poroso, a formação, atinge a metade do valor do meio período para o relaxamento da pressão. Neste caso específico, o meio poroso estava totalmente saturado com gás.

WYLIE e STREETER (1978a) e outras obras de hidráulica definem o golpe de aríete, ou *water hammer*, como um evento transiente de pressão resultante de uma variação brusca da velocidade de fluxo. Um fechamento rápido e repentino de

um poço em fluxo ou o movimento da coluna de perfuração no poço um gera o golpe de aríete (CAMPOS, 1985), que vai influenciar o estado de tensão ao redor do poço.

SANTARELLI et al., (1998) realizaram testes de campo para verificar a existência e o respectivo perfil da onda de pressão provocada pelo golpe de aríete ou *water hammer*. Infelizmente, os sensores de pressão localizados na cabeça do poço e próximo à zona produtora de óleo tinham uma precisão de variação insuficiente de apenas 10 Hz. Além disto, o fundo do poço estava cheio de areia e detritos, o que caracterizava uma superfície inadequada para a reflexão do pulso de onda. Neste caso houve uma atenuação muito forte da onda de pressão. Neste experimento, o sensor instalado na cabeça do poço detectou que o primeiro trem de ondas correspondeu com o previsto pela literatura. Mas, a atenuação foi “mascarada” pelos problemas supracitados.

VAZIRI et al., (2007a), pesquisando o comportamento de pulsos de onda em poços, apresentaram um estudo numérico que considerou os fatores contribuintes para a ocorrência de uma produção massiva de areia da formação logo após uma interrupção brusca da injeção de água em um poço injetor. Este estudo considerou o efeito transiente da onda de pressão que desestabilizou a interface poço – formação, levando à produção de areia e finos. Eles concluíram o estudo recomendando as melhores práticas para evitar e minimizar os efeitos deste problema durante a vida de um poço injetor.

Segundo MIRANDA et al., (2008a), ondas de pressão são geradas dentro de um poço de petróleo através da circulação de qualquer fluido em seu interior. As equações da velocidade do som sugerem a possibilidade da determinação de parâmetros elásticos de uma formação sob pressão. Operações rápidas na redução da vazão do fluido de perfuração produzem uma compressão maior dos fluidos e uma deformação mais acentuada nas paredes do poço, ou seja, é gerado um Golpe de Aríete. Como consequência, esse tipo de operação produz pressões transientes maiores. Operações rápidas podem ser reproduzidas pelo fechamento brusco do poço via *choke*, que é um tipo de válvula de fechamento. Através de uma análise gráfica da variação das amplitudes da pressão em função do tempo, geradas por essa operação, foi possível determinar o tempo característico do poço e correlacioná-lo com a velocidade do som. O modelo proposto sugeriu determinar parâmetros elásticos da formação pela reprodução de uma mudança brusca da

pressão no *choke*, identificado graficamente. Os parâmetros elásticos foram: módulo de rigidez da formação perfurada e a compressibilidade dos fluidos invasores.

NETO et al., (2009), baseado no trabalho de MIRANDA et al., (2008b), atualizou o estudo anterior adotando um modelo de poço de paredes rígidas para a região do poço aberto, afirmando que um modelo poroelástico poderia ser desenvolvido.

WANG et al., (2008a) desenvolveram um modelo teórico do martelo hidráulico (*water hammer*) que incorporaram os efeitos formação – completação do poço, mediante a utilização do modelo de ondas de Stoneley, onde a velocidade de propagação dos pulsos foi calculada. Foi realizado um teste de campo para medir o perfil de ondas causado pelo fechamento instantâneo de um poço injetor de água. Utilizando sensores de pressão no fundo do poço com 100 amostragens por segundo e com exatidão de 1 psi (*pounds square inches*), equivalente a 6,894 Kpa, obtiveram êxito ao capturar os detalhes dos pulsos de pressões.

Após análise detalhada dos vários resultados e conclusões de WANG et al., (2008b), RODRIGUES et al., (2009a) destacaram aspectos particularmente importantes para o estudo do comportamento de pulsos de pressões em poços logo após a interrupção brusca da operação. Dentre as principais conclusões pode-se destacar:

- A magnitude do primeiro pulso de pressão causado pelo fechamento repentino de um poço (evento muito rápido e instantâneo) não é uma função do tempo de fechamento da válvula. Isto pode ser precisamente descrito pela equação (2.3) posteriormente. Os autores ainda afirmam que esta equação poderá ser aplicada para os casos mais críticos possíveis;
- A transição entre os diâmetros da coluna de produção ou injeção de 3,5” nominal para o revestimento de produção de 7” nominal causaram uma redução de 10 vezes dos sinais de amplitude. Isto demonstra a importância de se determinar e caracterizar na prática o projeto de perfuração e completação do poço, principalmente em relação às variações de diâmetros, presença de reduções e telas de contenção de areia para a correta caracterização das ondas de pressão;

- A identificação e reprodução precisa do efeito martelo hidráulico (*water hammer*) requer amostragens de, no mínimo, 50 Hz (50 pontos por segundo). Isto também é aplicável para os casos de poços produtores, levando-se em conta as suas particularidades. Os autores ainda tentaram utilizar os dados de pressões registrados pelos sensores de fundo de vários poços injetores em operação na Bacia de Campos, Brasil, para confirmar os resultados obtidos até então. Mas, infelizmente, os dados não foram mecanicamente conclusivos.

RODRIGUES et al., (2009b) ainda desenvolveram um modelo baseado na teoria clássica do transiente de fluidos, de WYLIE e STREETER (1978b), como também a abordagem adotada por VAZIRI et al., (2007b). Equações diferenciais de movimento e continuidade foram usadas para calcular a velocidade e os perfis de pressão ao longo da coluna de completação sob condições de fluxo transiente.

A equação de movimento é descrita da seguinte forma:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{fv|v|}{2D_w} = 0 \quad (2.1)$$

A equação da continuidade ou do balanço de massa é:

$$v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

onde $H(x,t)$ é a altura piezométrica, $v(x,t)$ a velocidade do fluxo, f o fator de fricção, D_w o diâmetro do tubo ou do poço e a a velocidade da onda.

Estas equações na forma não dimensional, juntamente com as condições de contorno apropriadas, foram resolvidas numericamente utilizando o método das características e as técnicas de diferenças finitas, segundo WYLIE e STREETER (1978c). A aplicação deste método em poços de completação ou com geometria complexa é um grande desafio e requer, em alguns casos, calibração de testes de campo. Infelizmente, os testes programados sofreram adiamentos devido à falta de

sensores de pressão apropriados (frequência mínima de 40 Hz e precisão de 1 psi, equivalente a 6,894 Kpa).

O pulso de pressão máximo ΔP pode ser derivado a partir da equação (2.1), levando ao seguinte resultado:

$$\Delta P = -\rho a \Delta V \quad (2.3)$$

onde a é a velocidade da onda na água dada por

$$a = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \left(\frac{K}{E}\right) + \left(\frac{D}{e}\right)} \quad (2.4)$$

sendo K o módulo de *bulk* do fluido, ρ a densidade do fluido e E, D e e os módulos de elasticidade, diâmetro e de espessura do tubo (ou poço), respectivamente.

Considerando que a equação (2.3) já foi provada mediante testes de campo por WANG et al., (2008c), ela fornece valores confiáveis que podem ser usados como limites superiores para o máximo pulso de pressão.

Somente para exemplificar, aplicando a equação (2.3) para uma vazão de 6.000 m³/d através de uma coluna com 4,892 polegadas ou 0,12192 m de diâmetro interno (poço), com a densidade da água do mar de 1.025 Kg/m³ e com uma velocidade de onda de 1.500 m/s, o máximo pulso de pressão será da ordem de 1.270 psi ou 8.760 KPa.

Deve-se considerar neste cenário uma variável importante que é o tempo requerido pelo pulso de pressão para percorrer o interior do tubo ou do poço. MELIANDE et al., (2008) classificaram o evento de fechamento do poço ou da variação brusca de pressão interna em três tipos: evento rápido, lento e muito lento. Desta forma, um evento rápido é descrito pela seguinte equação:

$$T_f \leq \frac{2L}{a} \quad (2.5)$$

onde T_f é o tempo requerido para uma mudança completa na velocidade do fluxo, L o comprimento da tubulação (ou poço) e a a velocidade da onda no fluido.

O lado direito da equação (2.5) é denominado período da tubulação (ou poço), isto é, o tempo necessário para uma onda de pressão percorrer até a uma

superfície de reflexão e retornar. Neste caso, T é o tempo após a emissão de o comando ser recebido pela válvula para fechamento do poço.

Por outro lado, um evento lento é descrito pela seguinte equação:

$$\frac{2L}{a} < T \leq 500 \frac{2L}{a} \quad (2.6)$$

Para este caso, a máxima alteração de pressão é uma fração da variação total que ocorre em eventos rápidos. Para reduzir a velocidade da onda de pressão deve-se aumentar o diâmetro do poço.

Um importante resultado, segundo RODRIGUES et al., (2009c), nos casos de fechamento brusco de poços injetores de água na Bacia de Campos, Brasil, aplicando as considerações apropriadas nas equações (2.5) e (2.6), foi constatado que o tempo requerido para fechar as válvulas era superior a 15 minutos, enquanto que o tempo para o primeiro pulso de onda de pressão para alcançar a formação e vibrar as paredes dos poços era menor que 10 segundos.

Finalmente, WHITE (1965) relata a evidência de um teste de campo realizado em 1943 que demonstrou que uma onda cisalhante viajando ao longo de um poço criou ondas de pressão no fluido do poço capaz de movimentar um geofone na direção axial.

Isto reforça o argumento de que as paredes do poço seguem um movimento oscilatório em função do aumento ou diminuição brusca da pressão interna.

3. MODELO MATEMÁTICO DA OSCILAÇÃO DA PAREDE DO POÇO

3.1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática da vibração das paredes do poço, provocada pela variação repentina da pressão interna, e que nos remete à utilização da equação da onda, é um fenômeno ainda não descrito na literatura. Neste aspecto reside o caráter inédito deste trabalho. A equação governante deste fenômeno é deduzida nesta seção a partir das equações de equilíbrio da Teoria da Elasticidade e das equações constitutiva dos materiais.

3.2 VARIAÇÃO DA PRESSÃO

Uma primeira análise teórica e qualitativa do fenômeno sugere que um transiente de pressão de curta duração é gerado dentro do poço e a pressão resultante no fluido é observada a uma distância ao longo do poço que não é nem grande e nem pequena comparada com o diâmetro do poço.

Neste trabalho, a fonte geradora de ondas é o fenômeno da pressurização forte e brusca e sua conseqüente despressurização também rápida. Isto gera tensões e deformações nas paredes do poço que poderão induzir a falha, levando inclusive à perda parcial ou total do poço.

HORTON (1943) foi o primeiro pesquisador a evidenciar em testes de campo um pulso de onda viajando ao longo de um poço que posteriormente gerou pressão no fluido do poço capaz de movimentar suas paredes e um geofone na direção axial.

3.3 ONDAS ELÁSTICAS

Segundo FJAER et al., (2008c), ondas elásticas são perturbações mecânicas que se propagam através de um material. Estas ondas são capazes de viajar através do meio e fornecer diversas informações para a área de sísmica e perfilagem de poços abertos e revestidos. Desta forma, há uma conexão direta entre acústica de rocha e mecânica de rochas.

Ainda segundo o autor, ondas elásticas no ar e na água são geralmente denominadas ondas acústicas ou ondas sonoras. Estes termos também são geralmente utilizados para ondas elásticas em rochas e em poços.

Ondas elásticas em rochas propagam-se em uma velocidade que é função dos parâmetros elásticos e massa específica da rocha. Estes parâmetros dependem de outros parâmetros como a porosidade.

As ondas elásticas são classificadas em dois tipos:

- Longitudinal ou de Compressão: compreende uma compressão periódica do material. É também conhecida como onda primária, ou onda - P, originado do estudo de terremotos. A propagação é paralela ao eixo x.
- Transversal ou de Cisalhamento: também conhecida como onda secundária ou onda – S. É uma onda secundária que envolve um cisalhamento periódico do material.

O movimento dos elementos ou partículas do meio durante a propagação de uma onda de compressão e de cisalhamento é ilustrado na figura 3.1., FJAER et al., (2008d).

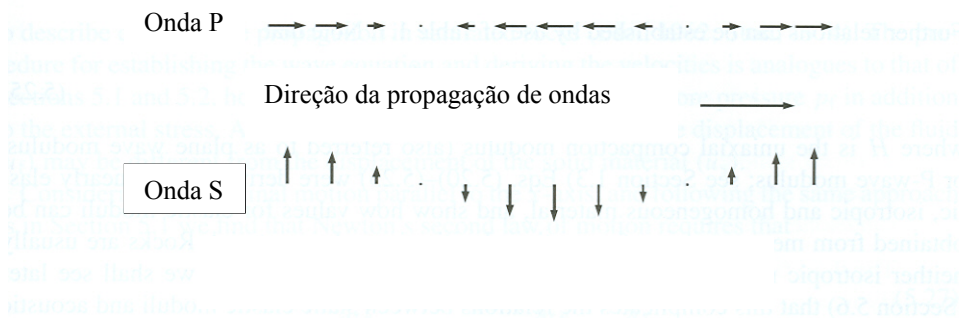


Figura 3.1: Movimento de uma partícula em propagação de onda P e S.

3.4 MODELO MATEMÁTICO DA OSCILAÇÃO DA PAREDE DO POÇO

3.4.1 Premissas e Condições de Contorno

Para o desenvolvimento deste trabalho será considerado o seguinte caso:

- Perfuração de um poço de petróleo em ambiente de lâmina d'água profunda com uma espessura de rocha de 2.000 m;
- O poço aberto se encontra em contato direto com o fluido de perfuração. Não há revestimento e nem telas do sistema de contenção de produção de areia;
- O modelo de formação assume rochas homogêneas e isotrópicas, onde não há uma direção preferencial para as ondas cisalhantes e longitudinais;
- O fluido de perfuração é estável e homogêneo do ponto de vista químico e físico, com massa específica equivalente de 1.180 kg/m^3 (9,85 lb/gal);
- O estado de tensões na parede do poço assume o modelo linear-elástico, com rocha isotrópica e relaxada tectonicamente;
- As tensões "in-situ" em relação ao eixo do poço, decompostas no eixo do poço vertical;
- As variações bruscas de pressão são transmitidas pelo fluido de perfuração à parede do poço;
- Não haverá deformação elasto-plástica da parede do poço;
- A formação rochosa considerada será uma rocha não reativa, isto é, estável quimicamente em relação ao fluido de perfuração;

- Inexistência de falhas geológicas naturais ou induzidas;
- O poço será considerado em ambiente com rochas normalmente pressurizadas, sem efeitos erosivos e com camadas sem mergulho e sem comunicação hidráulica com outras zonas;
- Assume-se inexistente qualquer hiato geológico, isto é, evento erosivo ou interrupção de evento deposicional;
- Assumidas não haver fissuras pré-existentes na trajetória do poço;
- A temperatura será de cerca de 80° C a 2.000 m de profundidade vertical de rocha;
- A pressão original é de 31.864 kPa a 2.000 m de profundidade;
- O gradiente de fratura será de 13,5 kPa/m;
- O diâmetro do poço (caliper) é de 0,3112 m (12 1/4"), uniforme, sem tortuosidade significativa;
- O poço tem perfil cilíndrico, sem espiral.

A figura 3.2 apresenta um esquema de um poço vertical submarino com os respectivos dados de litologia, geometria de poço e os valores das tensões de sobrecarga e tensão horizontal atuantes. Todas estas informações serão utilizadas como dados de entrada no modelo matemático.

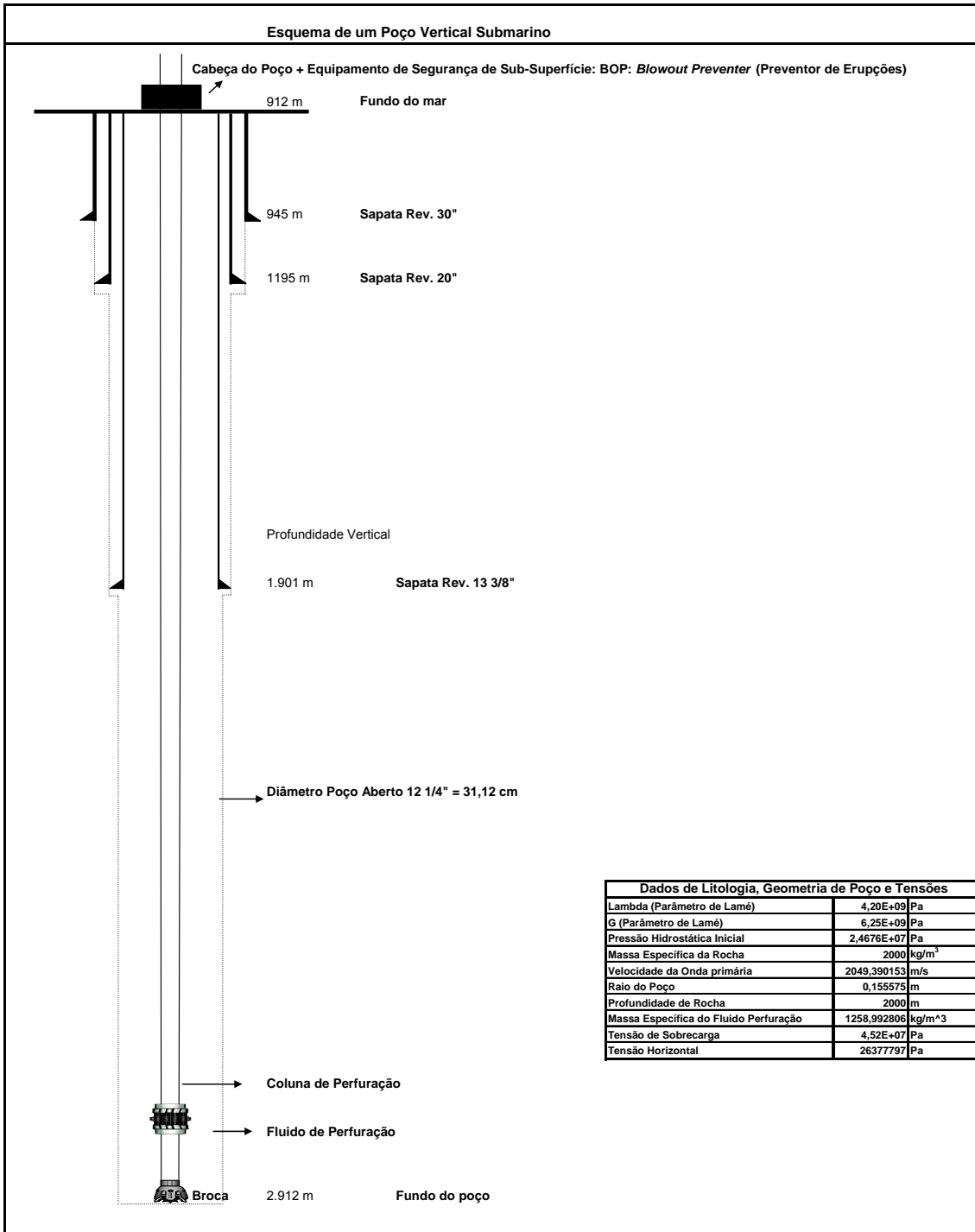


Figura 3.2: Esquema de um poço vertical submarino com os dados de litologia, geometria de poço e tensões atuantes.

3.4.2 Desenvolvimento do Modelo Matemático – Equações

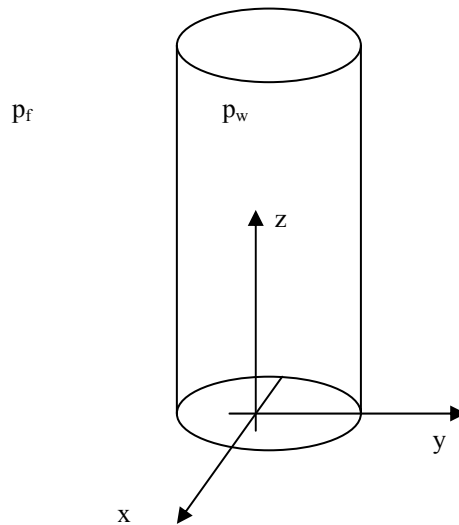


Figura 3.3: Esquema de trecho de um poço vertical.

Inicialmente, será analisado um trecho vertical de poço, conforme o esquema da Figura 3.3. As condições iniciais são facilmente estabelecidas pelo cálculo das tensões ao redor do poço, segundo FJAER et al., (2008e). Longe do poço, o estado de tensões é descrito no sistema cilíndrico mostrado na figura 3.3 por:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_r = \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta = \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z = \sigma_{ov} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

onde σ_h é a tensão horizontal, assumida isotrópica, e σ_z é a tensão vertical devido à sobrecarga (*overburden*). σ_r , σ_θ e σ_z são as componentes normais do tensor de tensões no sistema de coordenadas cilíndricas centradas no eixo do poço, a saber, as tensões normais radial, circunferencial e vertical. Neste caso, as tensões cisalhantes são nulas e as tensões normais são, conseqüentemente, tensões principais neste sistema de coordenadas. Na situação estática, próximo à parede do poço, as tensões são dadas, segundo FJAER et al., (2008f), por

$$\sigma_r = \sigma_h - (\sigma_h - p_w) R_w^2 / r^2 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_h + (\sigma_h - p_w) R_w^2 / r^2 \quad (3.3)$$

$$\sigma_z = \sigma_{ov} \quad (3.4)$$

$$\tau_{ij} = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

onde R_w é o raio do poço, r é a distância ao eixo do poço e p_w é a pressão hidrostática no fundo do poço. σ_{ov} é a tensão de sobrecarga e τ_{ij} são as tensões cisalhantes. Quando $r \rightarrow \infty$, as tensões tendem para a condição de tensões distante do poço, dada pela equação (3.1). Quando $r \rightarrow R_w$, a tensão radial tende para a pressão hidrostática, $\sigma_r = p_w$, e a tensão circunferencial tende para $\sigma_{\theta} = 2\sigma_h - p_w$.

Consideremos agora uma situação em que a pressão dentro do poço seja, instantaneamente, diminuída de certo valor. O caso do aumento instantâneo da pressão também leva a uma análise parecida. Com a diminuição da pressão, haveria um desequilíbrio da situação estática inicial e a rocha seria acelerada em direção ao centro do poço, tendendo a uma situação de equilíbrio para a nova pressão hidrostática. Neste processo, haveria uma tendência de colapso do poço. Neste caso, as equações governantes, desta situação transitória, seriam as equações de equilíbrio e de compatibilidade da Teoria da Elasticidade, combinadas com as leis constitutivas do material. As equações de equilíbrio expressam uma lei da física, a segunda lei de Newton, e a de compatibilidade, uma lei geométrica. Neste sentido são universais, sendo válidas qualquer que seja a natureza do meio. As equações constitutivas já dependeriam do material. Considerando que o material é uma rocha elástica, esta lei constitutiva será a lei de Hooke. Uma lei mais apropriada à rocha seria uma generalização da lei de Hooke para material poroelástico, conhecida como modelo de Biot. Mas a lei de Hooke pode ser usada neste caso, considerando as tensões totais. A combinação destas leis resulta na equação do movimento, segundo FJAER et al., (2008g). A lei do movimento pretendido deve ser escrita em coordenadas cilíndricas. Para deduzir esta equação do movimento, deve-se desenhar um diagrama de corpo livre e aplicar a segunda lei de Newton, dada por

$$\Sigma F_i = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

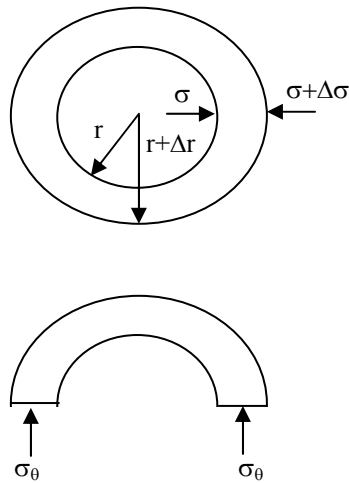


Figura 3.4: Diagrama de corpo livre.

onde F_i são forças superficiais devidas à pressão e forças internas devidas a tensões normais e cisalhantes, conforme Figura 3.4.

A solução das equações diferenciais obtidas por meio desta abordagem pode ser obtida usando diferenças finitas, para discretizar a derivada em relação ao tempo, e elementos finitos ou diferenças finitas, para discretizar o domínio espacial.

Por outro lado, devido à simetria da situação, soluções algébricas poderiam ser obtidas para as equações diferenciais. As soluções algébricas, possíveis em casos mais simples, são muito úteis para conferir as soluções numéricas.

Após obter as soluções das equações do movimento, as tensões na parede do poço podem ser calculadas pela lei de Hooke. Estas tensões, espera-se, devem crescer rapidamente em módulo com o tempo a partir do momento em que a pressão dentro do poço for suprimida, devido aos efeitos inerciais. Depois devem atingir um pico máximo e diminuir. Na verdade, a resposta será descrita a partir da solução de uma equação de onda, em que a parede do poço vibraria com uma determinada frequência. Ou esta vibração será rapidamente amortecida em um decaimento exponencial da perturbação. A determinação desta solução para diferentes situações, utilizando equações diferenciais, e abordando as respectivas deduções, não foi possível de ser encontrada na literatura pesquisada por este autor.

Para facilitar a abordagem, a solução deste problema deve ser progressiva. Primeiro resolve-se o problema mais simples, neste caso, um trecho de poço

vertical, totalmente simétrico e perfeito. Para uma futura expansão deste trabalho, será possível acrescentar uma tela de contenção de areia ou revestimento a este trecho vertical. Por último, poder-se-ia resolver o caso considerando um poço direcional e um poço horizontal. Para um trabalho inicial e pioneiro, a solução mais simples deve ser a escolhida.

A figura 3.5 abaixo mostra uma seção do poço onde está representado um elemento infinitesimal da rocha ao redor do poço. Este elemento está submetido a um estado de tensões principais dado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

O fato de estas tensões serem principais acarreta uma simplificação, devido à ausência de tensões tangenciais ou de cisalhamento.

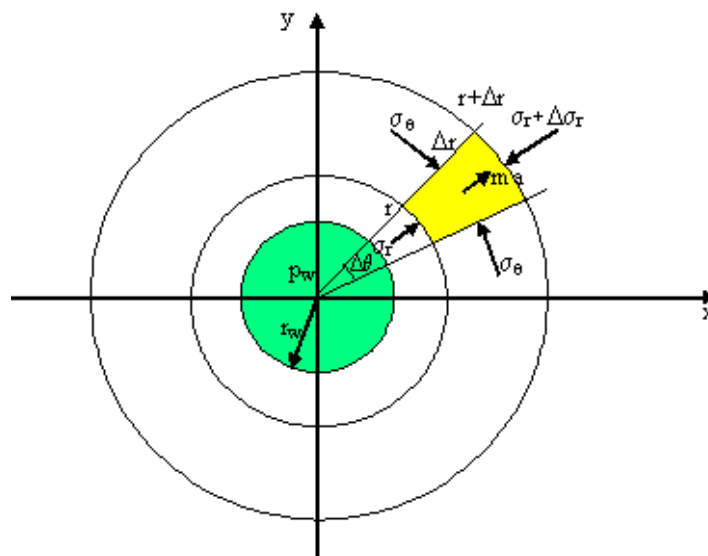


Figura 3.5: Diagrama de elemento infinitesimal ao redor do poço.

A equação de equilíbrio pode ser deduzida pela aplicação da segunda lei de Newton da dinâmica da seguinte forma:

$$\Sigma F_i = m \cdot a \quad (3.8)$$

$$\sigma_r r \Delta\theta \Delta z - (\sigma_r + \Delta\sigma_r)(r + \Delta r) \Delta\theta \Delta z + 2\sigma_\theta \sin(\Delta\theta/2) \Delta r \Delta z = -\rho \Delta\theta [(r + \Delta r)^2/2 - r^2/2] \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(3.9)$$

onde o deslocamento u foi adotado positivo quando no sentido de fora para o centro do poço. As tensões de compressão são positivas. Desenvolvendo, simplificando e desprezando infinitésimos de segunda ordem, obtém-se:

$$-r \frac{\Delta \sigma_r}{\Delta r} - \sigma_r + 2\sigma_\theta \frac{\text{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = -\rho r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

Lembrando o limite fundamental unitário para a razão $\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{sen}(\theta)/\theta = 1$, obtém-se,

passando ao limite para $\Delta r, \Delta t \rightarrow 0$,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (3.11)$$

que é a equação de equilíbrio. Na seqüência deve-se ainda substituir a lei de Hooke e as equações de compatibilidade para se obter uma equação contendo derivadas do deslocamento radial u , conforme FJAER et al., (2008h).

Desta forma, é possível deduzir-se uma equação governante para a oscilação da parede de um tubo de parede grossa sob efeitos de variações na pressão interna. Neste caso, um poço é um tubo de parede grossa, com o raio externo tendendo ao infinito. Esta equação é para o caso de um poço vertical, onde é possível considerar uma simetria circunferencial. Esta simetria diz respeito à tensão circunferencial, σ_θ , que, devido a esta simetria, passa a não depender da coordenada polar angular, θ , isto é:

$$\sigma_\theta(r+\Delta r/2, \theta+\Delta\theta) = \sigma_\theta(r+\Delta r/2, \theta) \quad (3.12)$$

ou, equivalentemente, conforme figura 3.6.

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.13)$$

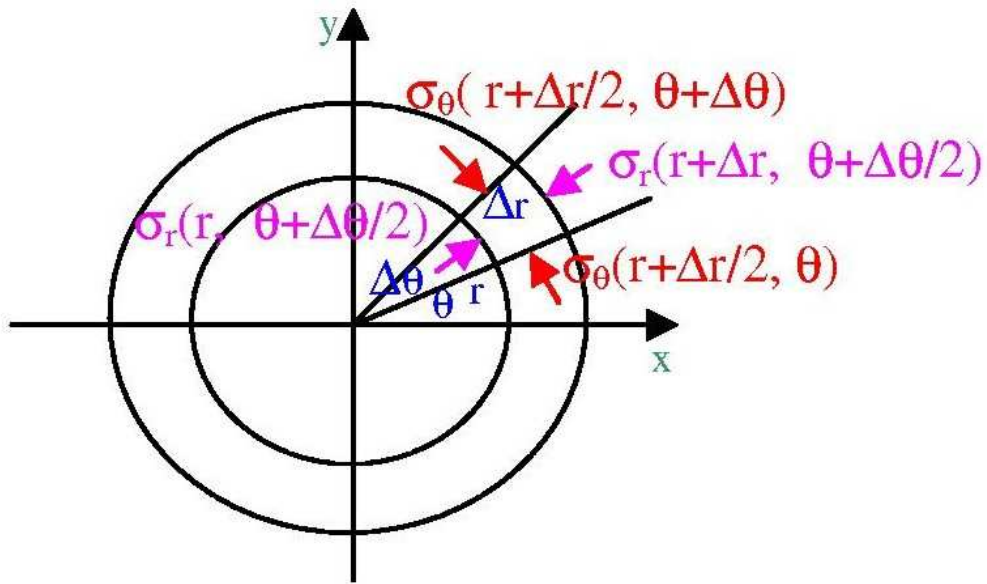


Figura 3.6: Seção transversal de um tubo de parede grossa.

A equação desenvolvida até agora é análoga às desenvolvidas por FJAER et al., (2008i), a saber, a equação do equilíbrio, equação de equilíbrio em coordenadas polares e de deslocamento radial da parede do poço e equação da onda. Destaca-se, portanto, que a equação que descreve o movimento das paredes do poço após a variação brusca da pressão interna comporta-se como a equação da onda, pois há uma dependência com relação ao tempo. As outras equações apresentadas anteriormente são para o caso estático, em que a derivada em relação ao tempo é nula, ou seja, as variáveis do sistema não variam no tempo.

Desta forma, voltando à equação deduzida anteriormente, tem-se que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (3.14)$$

onde ρ é a massa específica da rocha, considerada como não-porosa, t é o tempo, u é o deslocamento radial de um ponto situado a uma distância r do centro do poço, σ_r é a tensão radial e σ_θ é a tensão circunferencial neste ponto. Esta distância r deve ser maior do que o raio do poço, isto é, $r > R_w$, onde R_w é o raio do poço. Há métodos para resolver esta equação nesta forma, mas o melhor é tentar expressá-la em função de uma variável conveniente, sendo o deslocamento u esta

variável. O método de Airy poderia ser usado para solucionar esta equação, mas é mais conveniente expressá-la em função do deslocamento u , introduzindo a equação constitutiva do material, que é a lei de Hooke.

Para isto, antes de tudo, deve-se recordar as expressões das deformações em coordenadas polares. Segundo FJAER et al., (2008j), estas expressões podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \Gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \\
 \Gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \Gamma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde u , v e w são os deslocamentos nas direções de r , θ e z , respectivamente. As variáveis ε_{ij} e Γ_{ij} , com $i \neq j$, são as componentes do tensor de deformação, ou seja, as deformações normais e tangenciais. No caso em questão, a simetria do sistema leva a algumas simplificações nestas expressões. Considera-se aqui que as deformações circunferenciais v e w não dependem nem de θ nem de z , de modo que as derivadas das deformações para estas coordenadas são nulas. Em particular, w não depende de r . Estas simplificações levam às seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \Gamma_{r\theta} &= \Gamma_{rz} = \Gamma_{\theta z} = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo estas expressões na lei de Hooke, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= (\lambda + 2G) \varepsilon_r + \lambda \varepsilon_\theta + \lambda \varepsilon_z \\
 \sigma_\theta &= \lambda \varepsilon_r + (\lambda + 2G) \varepsilon_\theta + \lambda \varepsilon_z \\
 \sigma_z &= \lambda \varepsilon_r + \lambda \varepsilon_\theta + (\lambda + 2G) \varepsilon_z \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

onde λ e G são os parâmetros elásticos de Lamé, obtém-se a equação procurada:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \sigma_\theta &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2G) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \sigma_z &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Estas equações devem agora ser substituídas na equação (3.14) e a expressão deve ser simplificada. Após alguma álgebra, obtém-se a equação diferencial em termos do deslocamento u , como procurado.

Lembrando apenas que $\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} = 0$ obtém-se,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - (\lambda + 2G) \frac{u}{r^2}
 \tag{3.19}$$

A velocidade da onda primária ou longitudinal em um meio é dada por:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}
 \tag{3.20}$$

de modo que a expressão final fica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right)
 \tag{3.21}$$

Esta é a equação diferencial a ser resolvida com as condições iniciais e de contorno adequadas. As condições iniciais para a derivada em relação ao tempo nula e pressão dentro do poço igual a um valor inicial constante, digamos, p_0 . Se a derivada for colocada como nula, então a solução pode ser facilmente obtida como segundo FJAER et al., (2008k).

As condições de contorno são as pressões na parede interna do poço, em que a pressão é um pulso ou um abaixamento como no gráfico abaixo, figura 3.7.

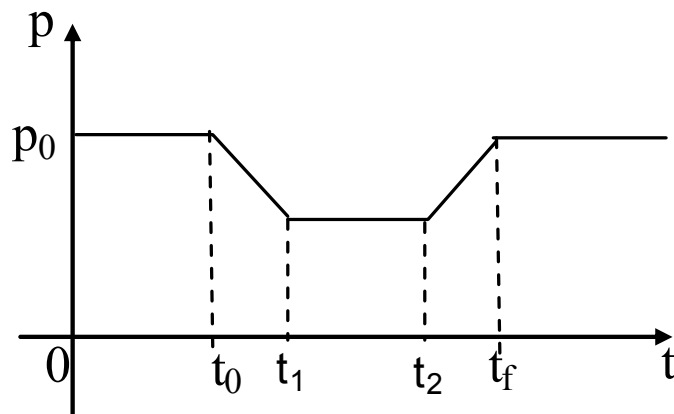


Figura 3.7: Abaixamento da pressão dentro do poço.

Evidentemente, vários tipos de pulsos podem ser testados. Estes pulsos podem ser escritos conforme a função degrau unitário de Heaviside. Durante o pulso e mesmo após, a parede do poço vai oscilar ou seguir um transitório exponencial, com a tensão também oscilando, podendo a parede sofrer desmoronamentos ou outro tipo de falha.

Já a condição de contorno externa será uma tensão horizontal constante a uma grande distância do poço ($\sigma_r = \sigma_h$ em $r \rightarrow \infty$). Numericamente, o valor de r_e , ou raio externo, não necessita ser infinito, evidentemente, devendo ser apenas muito maior do que o raio do poço.

Após obter o valor de u para um determinado ponto de coordenadas r e θ , pode-se voltar atrás e calcular as deformações, daí calcular as tensões e aplicar um critério de falha para aquele ponto particular. Um ponto próximo ou na parede do poço poderia ser o ponto crítico, onde as tensões estariam levando a uma falha inicial.

Logicamente, uma dedução da equação diferencial acima, discutindo as hipóteses simplificadoras, as condições de contorno e iniciais e a possível complicação em um poço inclinado ou mesmo horizontal serão sugeridas como uma possível extensão deste trabalho.

Conforme relatado inicialmente, neste ponto deste trabalho, não serão deduzidas e resolvidas as equações diferenciais, mas sim deduzidas e discutidas qualitativamente.

A última equação diferencial parcial deduzida é uma equação de onda, expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (3.22)$$

Mas, nota-se que ela pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) \right] \quad (3.23)$$

Esta é uma equação de onda em coordenadas cilíndricas. As condições de contorno e condições iniciais para esta equação devem agora ser especificadas. Para as condições iniciais, será admitido que a parede do poço não esteja vibrando ou se movimentando, de modo que, uma das condições iniciais pode ser escrita imediatamente da seguinte forma:

$$v(r, t=0) = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t=0 \quad (3.24)$$

onde v é a velocidade do meio na posição r no tempo $t=0$.

Outra condição de contorno inicial advém do valor das tensões na parede do poço para a pressão de fluxo inicial, isto é, a pressão de fluxo anterior ao início da solicitação transiente, conforme o gráfico da pressão ao longo do tempo apresentado na figura 3.7. Desta forma, a referência para o deslocamento será a lei de Hooke para a situação estática do poço e pode ser escrita segundo FJAER et al.,

(2008l). No instante inicial, o estado de tensões na parede do poço é conhecido, de acordo com FJAER et al., (2008m), a saber:

$$\sigma_r = \sigma_h + (\sigma_h - p_w) \frac{R_w^2}{r^2} \quad (3.25)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_h - (\sigma_h - p_w) \frac{R_w^2}{r^2} \quad (3.26)$$

$$\sigma_z = \sigma_v \quad (3.27)$$

onde R_w é o raio do poço, r o raio do ponto considerado, p_w a pressão no interior do poço, σ_h a tensão horizontal longe do poço. $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ são as tensões em um ponto cuja distância até o centro do poço é r . Nota-se que $\sigma_r \rightarrow \sigma_h$ e $\sigma_\theta \rightarrow \sigma_h$ quando $r \rightarrow \infty$. Neste ponto, é necessário especificar um valor para o deslocamento u no instante $t = 0$. Este ponto merece uma análise mais profunda. Uma alternativa é utilizar a sugestão dada por FJAER et al., (2008n) dada pela seguinte expressão:

$$u(r, t = 0) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} + \frac{(\sigma_h - p_w) R_w^2}{2G r} \quad (3.28)$$

onde p_w é a pressão dentro do poço. Esta condição inicial é apropriada, pois, a partir dela, substituindo na lei de Hooke, pode-se obter as tensões especificadas nas equações (3.25) e (3.26). De fato, esta é uma solução permanente da equação diferencial, quando a derivada em relação ao tempo é nula. Em um programa de computador, a equação diferencial pode ser solucionada numericamente colocando-se a derivada em relação ao tempo igual a zero.

Esta condição inicial para o deslocamento u , bem como as condições de contorno também deve ser especificada. A condição de contorno interna é dada pela pressão aplicada na face da formação. Sabe-se que esta pressão é constante até o momento em que tem início o golpe de aríete. Anteriormente, discutiu-se sobre como deve variar a pressão no tempo. Esta variação pode ser escrita algebricamente pelo uso da função degrau unitário de Heaviside. A condição de contorno externa pode

ser expressa pela condição de deformação constante em pontos muito afastados do poço. Assim, usando a Eq. (3.28), tem-se que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} \quad (3.29)$$

Outra forma de especificar a condição de contorno externa é escrever a lei de Hooke e usar o valor da tensão horizontal para pontos bastante afastados do poço

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_h \quad (3.30)$$

Voltando agora à condição de contorno interna. O que se sabe é que, na parede do poço, a tensão normal deve coincidir com a pressão dentro do poço, isto é:

$$\lim_{r \rightarrow r_w} \sigma_r(r, t) = p_w(t) \quad (3.31)$$

onde a notação $p_w(t)$ pretende descrever que a pressão no interior do poço, $p_w(t)$, é uma função do tempo t .

O que se deve admitir neste ponto é que a equação constitutiva de Hooke para material elástico não perde o valor. Deste modo, a condição descrita na Eq. (3.31) pode ser escrita de outra maneira:

$$\lim_{r \rightarrow r_w} [(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r}] = p_w(t) \quad (3.32)$$

Evidentemente, após a abertura de fraturas ou após a falha da rocha, as equações de compatibilidade e constitutiva deixam de ser válidas.

A formulação do modelo matemático consiste assim em escrever a E.D.P., Equação Diferencial Parcial, juntamente com as condições iniciais e de contorno.

O passo seguinte será solucionar este modelo por meio de métodos numéricos, ou mesmo algébricos.

Resumindo:

$$\text{EDP: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v_p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) \right] = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{CI: } \quad \lim_{t \rightarrow 0} v(r, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(r, t) &= \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} + \frac{(\sigma_h - p_w) R_w^2}{2G r} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \text{CC: } \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) &= \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} \\ \lim_{r \rightarrow r_w} [(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r}] &= p_w(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Discutindo as equações supracitadas, tem-se que a E.D.P. expressa as condições de equilíbrio dinâmico e de compatibilidade geométrica (continuidade) dentro do domínio, que é o meio rochoso desde a parede do poço até o infinito.

A primeira condição de contorno expressa o fato de que, no início, a parede do poço e o meio rochoso estão em repouso, isto é, sem qualquer vibração.

A segunda condição inicial expressa a deformação da parede do poço e do meio rochoso em relação a uma situação estática. Primeiro há a influência da tensão horizontal, que já estava lá antes da perfuração do poço. Depois há a influência da pressão no poço, que não é exatamente igual à tensão horizontal. Nota-se que, se a pressão no poço for exatamente igual à tensão horizontal, não haverá uma segunda parcela na equação para a segunda condição inicial.

A primeira condição de contorno, a condição de contorno externa, longe do poço, depende apenas da tensão horizontal longe do poço. Está-se seguro quando se nota que o poço não tem influência, e nem deve ter mesmo, em um ponto afastado. Na prática, se for tentada uma solução numérica, deve-se limitar o raio r a um raio externo, R_e , tal que $R_e \gg R_w$. Neste caso, é conveniente escrever esta primeira condição de contorno da seguinte forma

$$\lim_{r \rightarrow R_e} u(r, t) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} + \frac{(\sigma_h - p_w)}{2G} \left(\frac{R_w}{r} \right)^2 \quad (3.36)$$

A terceira condição de contorno deve ser analisada com mais cuidado. Mas ela expressa simplesmente o valor da tensão normal radial na parede do poço, que é igual à pressão dentro do poço. Aqui é importante lembrar que esta pressão $p_w(t)$ não é constante com o tempo. Esta pressão é uma função transiente, representando o golpe de aríete na parede do poço, sendo algo também parecida com o gráfico da figura 3.7.

4. VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Um modelo matemático da oscilação da parede de um poço de petróleo foi proposto. O modelo é composto de uma equação diferencial e de condições iniciais e de contorno. A condição inicial equivale ao estado de tensões ao redor do poço em uma situação estática. A condição de contorno externa é o estado de tensão original não perturbado no subsolo e a condição de contorno interna é a pressão instantânea no interior do poço. Alguns métodos para solucionar este modelo matemático foram levantados, mas necessitam mais estudos para a escolha do melhor método.

4.1 DEFINIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA

Considerando a Figura 4.1, a pressão inicial, p_0 , dentro do poço, no instante t_0 , é subitamente diminuída para um valor menor, $p_{wf} = p_{w0} - \Delta p$, i.e. $p < p_{w0}$. A parede do poço, que se encontrava em equilíbrio, subitamente, passa para uma situação de desequilíbrio. Desta forma, a parede acelera no sentido de diminuição do diâmetro do poço, ou seja, no sentido de colapsar-se, tentando restabelecer o equilíbrio estático. Neste processo, a parede acelera, enquanto a tensão radial e circunferencial sofrem variações, podendo atingir níveis capazes de causar a ruptura e o conseqüente desmoronamento da parede do poço.

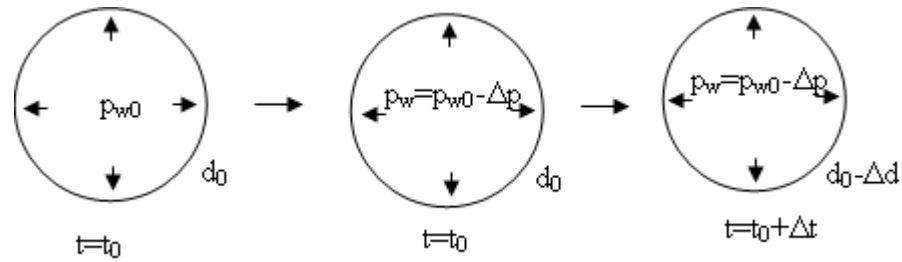


Figura 4.1: Diminuição da pressão dentro do poço levando a uma diminuição do diâmetro e variação dinâmica das tensões ao redor do poço.

Deve-se notar que a pressão radial na face da parede do poço será sempre igual à p_{wf} a menos de uma pequena parcela de aceleração do fluido em contato com a parede, que poderá ser desprezada. A tensão de sobrecarga ou “*overburden*” não sofre alteração.

Devido à aceleração da parede do poço durante o pequeno intervalo de tempo Δt , a tensão radial e circunferencial, na posição r em relação ao centro do poço, $r > R_w$, onde R_w é o raio do poço ($R_w = d/2$), atingirão valores superiores às tensões de equilíbrio estático correspondentes à pressão interna igual a p_w . Denominaremos estas tensões de tensões dinâmicas, σ_{rd} e $\sigma_{\theta d}$.

Na situação inicial, no instante t_0 , o poço se encontrava em equilíbrio estático, com as tensões radial e circunferencial dadas por FJAER et al., (1992b).

$$\sigma_r = \sigma_h - (\sigma_h - p_{w0}) \left(\frac{R_w}{r} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$\sigma_r = \sigma_h + (\sigma_h - p_{w0}) \left(\frac{R_w}{r} \right)^2 \quad (4.2)$$

Após o tempo Δt , o raio do poço diminui e a tensão radial e circunferencial na posição r sofrem uma variação. Estes novos valores, devido aos efeitos dinâmicos advindos da aceleração da parede, são uma função da posição r e do tempo t

$$\sigma_{rd} = f(r, t) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\theta d} = g(r, t) \quad (4.4)$$

onde σ_{rd} e $\sigma_{\theta d}$ são as tensões radial e circunferencial dinâmicas, dependentes da posição e do tempo. O cálculo destas funções f e g deverá ser feita por meio de equações diferenciais parciais de equilíbrio, tendo como base as leis de Newton da Mecânica.

O problema consiste em obterem-se os valores das pressões dinâmicas σ_{rd} , e $\sigma_{\theta d}$, que, juntamente com a tensão de sobrecarga ou “*overburden*”, serem usadas em um critério de falha, como, por exemplo, o de Mohr-Coulomb, para prever a falha e desmoronamento da parede do poço.

4.2 ANÁLISE DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DO DESMORONAMENTO DA PAREDE DO POÇO

Para simplificar o processo, a proposta é resolver o problema para uma queda de pressão abrupta, do valor da pressão hidrostática, p_{w0} , para um valor inferior, p_w , de acordo como a figura 4.2 a seguir:

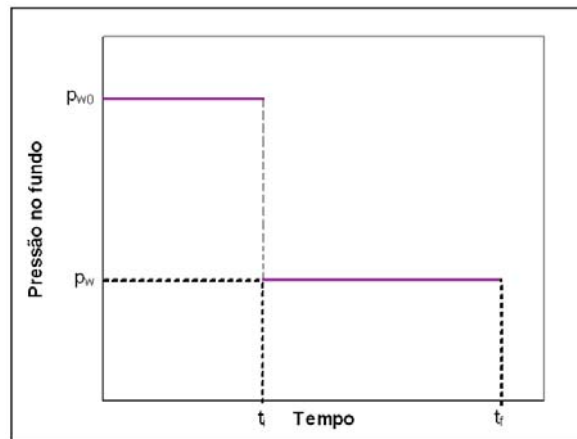


Figura 4.2: Queda de pressão abrupta na parede do poço.

Se a pressão cair abruptamente, como acima, a componente de tensão de compressão radial deve diminuir também para um nível de tensão inferior, eventualmente podendo se tornar uma tensão de tração radial, de acordo com uma lei de variação, como, por exemplo, algo como mostrado na figura 4.3 a seguir:

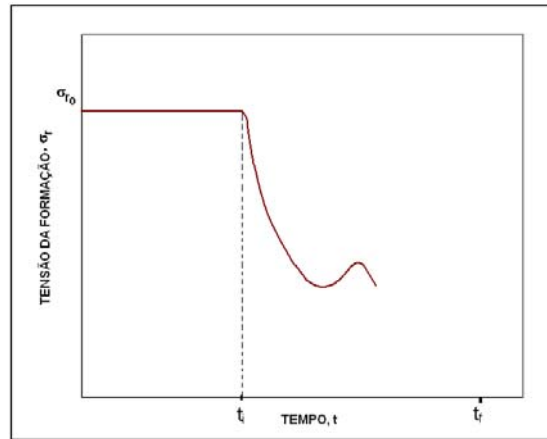


Figura 4.3: Queda de tensão na parede do poço.

A tensão de compressão circunferencial, σ_θ , também sofrerá uma variação. A tensão vertical, de sobrecarga ou “*overburden*” poderá ser considerada constante no tempo. Com o valor destas tensões, é possível aplicar um critério de falha para verificar se a rocha vai falhar, isto é, desmoronar.

Para se determinar este histórico do tensor de tensões na posição r , dentro da formação, é necessário encontrar a solução da equação diferencial que governa este fenômeno. Esta equação, já deduzida anteriormente, é uma equação de equilíbrio, tendo como base a 2ª lei de Newton, conforme FJAER et al., (1992c) para se ter uma idéia da forma desta equação. Também, de acordo com FJAER et al., (1992d), pode-se ver o formato desta equação em coordenadas retangulares. Mas neste caso, deve-se escrever a equação em coordenadas polares. Além disto, deve-se expressá-la em termos de deslocamentos, assumindo que a lei de Hooke continua válida sob carregamento dinâmico. Temos então

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (4.5)$$

onde u é o deslocamento na direção radial de um ponto P de coordenadas polares (r, θ) , t o tempo, ρ é a massa específica da formação, considerada maciça, σ_r é a tensão radial, σ_θ é a tensão circunferencial e r a distância em relação ao centro do poço, conforme figura 4.4.

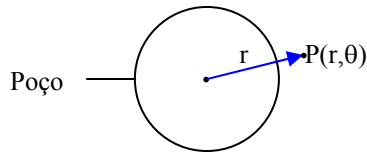


Figura 4.4: Esquema da parede do poço.

Este trabalho considera o poço como sendo vertical. Para a condição inicial, a parede do poço se encontra em repouso com relação ao eixo do poço. A pressão dentro do poço está estabilizada, igual a um valor constante, p_{w0} . Nesta condição inicial, considerando o perfil do poço perfeitamente circular e a rocha homogênea, o estado de tensões na rocha em volta do poço é definido pelo tensor de tensões

$$\bar{\bar{\sigma}} \doteq \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ov} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde as tensões tangenciais τ_{ij} são todas nulas, de modo que as tensões normais são tensões principais. Além disso, as tensões normais são solução da equação diferencial de equilíbrio, isto é, com a derivada de u em relação ao tempo nula, conforme equação (4.7).

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.7)$$

onde σ_r é a tensão normal radial e σ_θ a tensão circunferencial. FJAER et al., (1992e) resolve esta equação para condições de contorno adequadas, ou seja, pressão hidrostática dentro do poço e tensão horizontal a uma distância infinita do poço. Nesta solução, FJAER et al., (1992f) assumem que a lei de Hooke se aplica. A solução final são as equações (4.8) e (4.9) a seguir.

$$\sigma_r = \sigma_h - (\sigma_h - p_{w0}) \left(\frac{R_w^2}{r^2} \right) \quad (4.8)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_h + (\sigma_h - p_{w0}) \left(\frac{R_w^2}{r^2} \right) \quad (4.9)$$

onde σ_{θ} é a tensão circunferencial, σ_r é a tensão radial, σ_h é a tensão horizontal, p_{w0} é a pressão hidrostática dentro do poço, R_w é o raio do poço e r a distância do ponto dentro da formação até o centro do poço.

Partindo-se da equação diferencial que governa o fenômeno e escrevendo-a em termos de deslocamento, u , ao invés de tensão radial e circunferencial mantendo a derivada segunda de u em relação ao tempo, que é a aceleração, diferente de zero, obtém-se a equação (4.10), notando que as constantes elásticas não são canceladas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (4.10)$$

onde λ e G são as constantes elásticas de Lamé. Esta equação pode ser escrita também como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (4.11)$$

onde V_p é a velocidade da onda primária dada por

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (4.12)$$

A solução desta equação exige duas condições iniciais e duas condições de contorno. As duas condições iniciais são as de deformação e velocidade no início, quando acontece a diminuição abrupta de pressão no poço; a velocidade é certamente nula. Mas a deformação não. O valor do deslocamento no início pode ser encontrada em FJAER et al., (1992g).

$$u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + 2G)} r + \frac{\sigma_h - p_w}{2G} \frac{R_w^2}{r} \quad \text{para } t = t_i \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{para } t = t_i \quad (4.14)$$

As condições de contorno são a pressão na parede do poço, igual a p_w e deformação nula no infinito, ou em um raio bastante grande, durante todo o tempo, conforme a seguir

$$\sigma_r = p_w \quad \text{para } r = R_w \quad (4.15)$$

$$u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + 2G)} R_\infty = 0 \quad \text{para } r \rightarrow R_\infty \quad (4.16)$$

Um problema importante é transformar a condição de contorno em $r = R_w$, expressa em termos de tensão, para uma expressão em termos de deslocamento $u(r = R_w, t) = u_w$. Isto é fundamental para a solução adequada deste problema. Aqui, é preciso saber se o fluido, em contato com a parede do poço, teria alguma inércia, pois a parede do poço estará em movimento. Se assumirmos que não, que a função do fluido é somente aplicar a pressão p_w , então a condição de contorno escrita acima é correta. Por outro lado, temos a lei de Hooke, que será considerada válida durante todo o tempo conforme FJAER et al., (1992h).

$$\sigma_r = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \quad (4.17)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2G) \frac{u}{r} \quad (4.18)$$

A condição interna, para a parede do poço, isto é em $r = R_w$, será uma equação diferencial parcial do tipo abaixo.

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} = p_w = \text{constante, para } r = R_w \quad (4.19)$$

Neste ponto, o problema está totalmente formulado. Tem-se que resolver uma E.D.P., Equação Diferencial Parcial, sujeita a condições iniciais (C.I.) e de contorno (C.C.).

Resumindo tudo, temos:

$$\text{EDP: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (4.20)$$

$$\text{C.I.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r + \frac{\sigma_h - p_{wi}}{2G} \frac{R_w^2}{r} \quad \text{para } t = t_i \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t = t_i \quad (4.22)$$

$$\text{C.C.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} R_\infty = 0 \quad \text{para } r \rightarrow R_\infty \quad (4.23)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} = p_w \quad \text{para } r = R_w \quad (4.24)$$

onde p_w é constante, porém $p_w - p_{wi}$.

A proposta é resolver este sistema de equações numericamente, discretizando o espaço em torno do poço. Isto pode ser feito por diferenças finitas ou elementos finitos. Resolve-se o problema por uma discretização do tempo desde $t = t_0$ até um número suficiente de passos de tempo, que permita determinar os valores de tensões máximas. Desta forma, para cada ponto da malha de diferenças finitas será determinado um deslocamento u e uma velocidade $\partial u / \partial t$, que são suficientes para a determinação das tensões, via lei de Hooke, isto é:

$$\sigma_r = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \quad (4.25)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2G) \frac{u}{r} \quad (4.26)$$

$$\sigma_z = \sigma_{ov} \quad (4.27)$$

Para desenvolver um esquema numérico, deve-se considerar que a condição de contorno no infinito seja trazida para certa distância do poço dentro da formação, conforme ilustrado na figura 4.5.

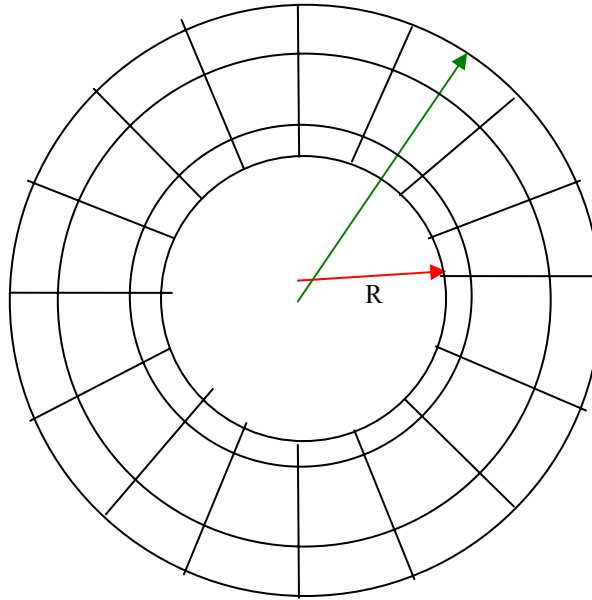


Figura 4.5: Discretização para um esquema numérico.

Esta distância não precisa ser muito grande, pois a deformação deve diminuir rapidamente, à medida que se afasta do poço. Pode ser igual a cem vezes o raio do poço, ou seja, $100 R_w$, ou outro valor conveniente, por exemplo.

A figura 4.5 mostra uma malha para o esquema de diferenças finitas a ser desenvolvido. Um método conveniente é iniciar cada ponto da malha com a condição inicial e dar passos de tempo para calcular os valores de deformação u em cada nó. Uma vez conhecida a deformação, é possível avaliar-se a derivada em relação à r e calcular as tensões radial e circunferencial. Além disto, deve-se discretizar as Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.) e condições de contorno na malha da figura 4.5. As coordenadas, neste caso, são polares. Para facilitar, antes de discretizar, pode-se fatorar a equação diferencial, levando-se em conta que há uma derivada parcial de segunda ordem no segundo membro da equação.

Na prática, para resolver por este método, é possível desenvolver um programa no Visual Basic do Excel, Microsoft, no programa FORTRAN ou utilizar o programa comercial MatlabTM, que poderá ser mais apropriado para gerar curvas, variando-se o raio do poço, ou as propriedades elásticas da rocha, por exemplo.

Considerando as equações (4.20) a (4.24), nota-se que o problema é composto de uma equação diferencial de segunda ordem, com as condições iniciais e de contorno necessárias para determinar todas as incógnitas.

A solução desejada é encontrar o deslocamento $u = u(r, t)$, isto é, uma função de r e t , e a derivada desta deformação em relação ao tempo, ou velocidade, $\partial u / \partial t$, para qualquer posição r e qualquer tempo t . A solução é, obviamente, uma função $u = u(r, t)$. De posse desta função, torna-se possível determinarem-se a tensão radial e circunferencial, de acordo com FJAER et al., (1992i). Devido a dificuldades de se encontrar uma solução algébrica para este problema, opta-se por uma solução numérica. A solução numérica é bastante apropriada para um trabalho de engenharia. Porém, é necessário garantir que as condições de contorno sejam compatíveis com o problema físico. Não há dúvida quanto à primeira condição inicial, descrita pela equação (4.21), pois a solução é obtida da própria Equação Diferencial Parcial (E.D.P.) com o segundo membro igual a zero e condições de contorno apropriadas para a situação anterior ao choque de pressão.

A segunda condição inicial, descrita pela equação (4.22), também está correta, considerando que a parede do poço se encontrava em repouso imediatamente antes do choque de pressão. Longe do poço, a tensão radial e circunferencial tendem ao valor da tensão horizontal. Foi considerado que o estado de tensões horizontais é isotrópico, isto é, as duas tensões horizontais são iguais. Além disto, deve-se desprezar a parcela devida à tensão de sobrecarga, ou de “*overburden*”, Também, a segunda condição de contorno está bastante aceitável.

Discutindo-se a equação e suas condições de contorno, e optando-se, provisoriamente, por desprezar o termo devido à tensão de sobrecarga, isto nos leva a considerar $\sigma_z = 0$ e $\varepsilon_z = 0$ nas equações. Se isto puder ser feito, a primeira condição de contorno passa de $u = 0$ para $r \rightarrow \infty$, conforme equação (4.28).

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_h \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

Já a Equação Diferencial Parcial (E.D.P.) pode ser fatorada para o formato abaixo, como pode ser conferido, operando com as derivadas nesta equação.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] \quad (4.29)$$

Agora, esta equação pode ser reescrita como um sistema de duas equações diferenciais, em que as derivadas em relação ao tempo aparecem como de primeira ordem. Isto é possível pela criação de uma variável adicionada da seguinte forma:

$$v(r,t) = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} = V_p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v(r,t)) \right] \quad (4.31)$$

onde $v(r,t)$ é a velocidade do contínuo na posição r e no tempo t , sendo definida pela derivada do deslocamento u em relação ao tempo. Reunindo as equações, o problema consiste no seguinte:

E.D.P.

$$v(r,t) = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} = V_p^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v(r,t)) \right] \quad (4.33)$$

C. I. (para $t = 0$ e r qualquer)

$$u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + 2G)} r + \frac{\sigma_h - p_w}{2G} \frac{R_w^2}{r} \quad \text{para } t = t_i \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t = t_i \quad (4.35)$$

C.C. (para $r = \infty$ e $r = R$ e qualquer tempo $t > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(1-\nu)}{E} \sigma_h \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (4.36)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} = p_w \quad \text{para } r = R \quad (4.37)$$

No final, o objetivo é o cálculo das tensões radial e circunferencial, segundo FJAER et al., (1992j), além da de sobrecarga, a saber:

$$\sigma_r = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \quad (4.38)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2G) \frac{u}{r} \quad (4.39)$$

$$\sigma_h = \sigma_{ov} = \text{constante}, \text{ para qualquer valor de } r \text{ e qualquer tempo } t. \quad (4.40)$$

As tensões tangenciais são todas nulas. Com o cálculo destas tensões normais (principais) pode-se aplicar um critério de falhas, como o de Mohr-Coulomb, para verificar a estabilidade da parede, inclusive, se um critério deste tem validade em condições dinâmicas.

5. ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A modelagem matemática da oscilação, deformação, da parede de um poço de petróleo submetida a um diferencial de pressão interna brusco foi proposta. O modelo é composto de uma equação diferencial e de condições iniciais e de contorno. A tarefa agora é aplicar o modelo numérico / computacional para avaliar o resultado e a consequência do diferencial de pressão aplicado no sistema poço e avaliar a sua integridade.

A Equação Diferencial Parcial (E.D.P.), as condições iniciais (C.I.) e condições de contorno (C.C.), discutidos anteriormente, levam à formulação seguinte para o modelo matemático:

$$\text{E.D.P.: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\text{C.I.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r + \frac{\sigma_h - p_{w0}}{2G} \frac{R_w^2}{r} \quad \text{para } t = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{C.C.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} R_\infty \quad \text{para } r = R_\infty \text{ onde } R_\infty \gg R_w \quad (5.4)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_w} + \lambda \frac{u}{R_w} = p_{wf} \quad \text{para } r = R_w \quad (5.5)$$

Nota-se que é bastante razoável colocar o problema deste modo. Na distância R_∞ , que corresponde a uma distância muito longe do poço, ou condição no infinito, ou condição de contorno externa, a deformação é a devida à tensão original do campo, σ_h , estabelecida muito antes da perfuração do poço, durante o tempo geológico. Nesta distância, considerada muito maior do que o raio do poço, a presença do poço, com sua pressão hidrostática, p_w , não perturba o estado de tensões natural. Por isso, a deformação nesta distância, teoricamente infinita, será sempre igual a

$$u(R_\infty, t) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} R_\infty \quad (5.6)$$

No entanto, será mais exato utilizar o seguinte sistema de equações diferenciais, reconhecendo que R_∞ não é, de fato, infinito:

$$\text{E.D.P.: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5.7)$$

$$\text{C.I.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r + \frac{\sigma_h - p_{w0}}{2G} \frac{R_w^2}{r} \quad \text{para } t = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (5.9)$$

$$\text{C.C.: } u = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} R_\infty + \frac{\sigma_h - p_{w0}}{2G} \frac{R_w^2}{R_\infty} \quad \text{para } r = R_\infty \quad \text{onde } R_\infty \gg R_w \quad (5.10)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_w} + \lambda \frac{u}{R_w} = p_{wf} \quad \text{para } r = R_w \quad (5.11)$$

A segunda condição de contorno estabelece que a tensão radial, dada pela lei de Hooke, será igual à pressão hidrostática final, p_{wf} . Neste ponto, deve-se fazer

uma distinção entre a pressão hidrostática inicial, p_{w0} , e a final, p_{wf} . Nota-se que, no caso de uma queda brusca de pressão, caso de colapso, $p_{wf} < p_{w0}$, e no caso de um aumento brusco de pressão, caso de sobrecarga, $p_{wf} > p_{w0}$. A segunda condição de contorno é então, dada por

$$(\lambda + G) \frac{\partial u}{\partial r}(R_w, t) + \frac{\lambda}{R_w} u(R_w, t) = p_{wf} \quad (5.12)$$

As condições iniciais também estão bem razoáveis. A primeira estabelece o valor da deformação em volta do poço. Este valor, substituído na Lei de Hooke, fornece os valores prescritos de tensões iniciais ao redor do poço. A segunda condição inicial estabelece que o meio poroso esteja em repouso no início do processo de choque.

Neste ponto, é recomendável adimensionalizar o problema. Para isso, será utilizado um comprimento característico, que pode ser o raio do poço, R_w . Para o tempo característico, T , será usado o tempo gasto para a onda de choque percorrer um raio de poço, isto é:

$$T = \frac{R_w}{V_p} \quad (5.13)$$

As variáveis adimensionais podem ser adotadas como as seguintes

$$r_d = \frac{r}{R_w} \quad (5.14)$$

$$u_d = \frac{r_d}{R_w} \quad (5.15)$$

$$t_d = \frac{1}{T} = \frac{tV_p}{R_w} \quad (5.16)$$

Explicitando r e t nestas definições:

$$r = R_w r_d \quad (5.17)$$

$$u = R_w u_d \quad (5.18)$$

$$t = \frac{R_w}{V_p} t_d \quad (5.19)$$

E substituindo na E.D.P., obtém-se:

$$\frac{\partial^2 u_d}{\partial t_d^2} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial u_d}{\partial r_d} + \frac{u_d}{r_d} \quad (5.20)$$

Este processo de adimensionalização deve ser estendido às condições iniciais e às condições de contorno. No entanto, antes de fazê-lo, convém simplificar um pouco mais o problema. Vamos criar outra variável, a velocidade em cada ponto, para podermos escrever duas equações diferenciais parciais em que as derivadas em relação ao tempo são de primeira ordem. Desta forma, tem-se:

$$v(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial v(r, t)}{\partial t} = V_p^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (5.22)$$

Após esta transformação, o sistema de Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.) deve ser adimensionalizado. Substituindo t e u escrito em função de t_d e u_d , obtém-se:

$$\frac{v}{V_p} = \frac{\partial u_d}{\partial t_d} \quad (5.23)$$

ou, definindo a velocidade adimensional por v/V_p :

$$v_d(r_d, t_d) = \frac{\partial u_d(r_d, t_d)}{\partial t_d} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial v_d(r_d, t_d)}{\partial t_d} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial u_d}{\partial r_d} + \frac{u_d}{r_d} \quad (5.25)$$

As condições iniciais e de contorno, após a adimensionalização, ficam assim definidas: as condições iniciais, para $t_d = 0$ são

$$u_d(r_d, 0) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r_d + \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r_d} \quad (5.26)$$

$$v_d(r_d, 0) = 0 \quad (5.27)$$

enquanto as condições de contorno, a primeira, ou a externa, para $r_d = R_\infty/R_w = R_{\infty_d}$

$$u_d(R_{\infty_d}, t_d) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} R_{\infty_d} + \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} \frac{1}{R_{\infty_d}} \quad (5.28)$$

e a condição interna, para $r_d = 1$:

$$(\lambda + G) \frac{\partial u_d}{\partial r_d} \Big|_{(1, t_d)} + \lambda u_d(1, t_d) = p_{wf} \quad (5.29)$$

Desta forma, estas equações adimensionais serão mais convenientes. O próximo passo será discretizá-las usando um dos esquemas de diferenças finitas disponíveis na literatura.

5.1. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO E CONVENÇÕES DE SINAIS

A convenção de sinal adotada para a tensão normal é positiva para compressão e negativa para tração. Para o deslocamento radial ou expansão da parede do poço será negativo e o fechamento ou colapso do poço será positivo. Aplicando-se a convenção de sinal, têm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 u_d}{\partial t_d^2} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial u_d}{\partial r_d} - \frac{u_d}{r_d^2} \quad (5.30)$$

$$u_d(r_d, 0) = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r_d + \frac{\sigma_h - p_{wf0}}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r_d} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial u_d(r_d, 0)}{\partial t_d} = 0 \quad (5.32)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial u_d}{\partial r_d} \Big|_{(1, t_d)} + \lambda u_d(1, t_d) = p_{wf} \quad (5.33)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial u_d}{\partial r_d} \Big|_{(\infty, t_d)} + \lambda \frac{u_d(\infty, t_d)}{r_{d\infty}} = \sigma_h \quad (5.34)$$

onde p_{wf0} é a pressão inicial e p_{wf} é a pressão final.

A equação será resolvida por meio de um esquema implícito de diferenças finitas com o auxílio do algoritmo de Thomas. A discretização da equação diferencial fornece a seguinte equação de diferença

$$-\frac{u_{di}^{n-1} - 2u_{di}^n + u_{di}^{n+1}}{(\Delta t_d)^2} = \frac{u_{di-1}^{n+1} - 2u_{di}^{n+1} + u_{di+1}^{n+1}}{(\Delta r_d)^2} + \frac{1}{r_{di}} \frac{u_{di}^{n+1} - u_{di-1}^{n+1}}{\Delta r_d} - \frac{u_{di}^{n+1}}{r_{di}^2} \quad (5.35)$$

onde o índice n expressa o tempo adimensional, que varia desde $n = 0$ até um tempo final $n = N$, com passos de tempo Δt_d constante. O índice i expressa a distância ao centro do poço, que varia desde a parede do poço, $i = 1$ até uma distância suficientemente grande, $i = I$, com passos de deslocamento Δr_d constante. Nota-se que a distância adimensional ao poço é $r_{di} = i\Delta r_d$.

As condições iniciais expressam a situação de equilíbrio inicial, em que a pressão dentro do poço era p_{w0} e o fato de o meio estar em repouso. Isto permite especificar os deslocamentos em todos os nós, desde a parede do poço ($i = 1$) até a distância “no infinito” ou suficientemente grande ($i = I$), para os passos de tempo inicial ($n = 0$) e após o primeiro passo de tempo ($n = 1$)

$$u_{di}^0 = \frac{\sigma_h}{2(\lambda + G)} r_{di} + \frac{\sigma_h - p_{w0}}{2(\lambda + G)} \frac{1}{r_{di}} \quad (5.36)$$

$$u_{di}^1 = u_{di}^0 \quad (5.37)$$

Já as condições de contorno especificam a condição de tensão radial no poço ($i = 1$) e o deslocamento em uma distância muito grande do poço ($i = I$) no tempo seguinte ($n + 1$).

$$(\lambda + G) \frac{u_{d2}^{n+1} - u_{d1}^{n+1}}{\Delta r_d} + \lambda u_{d1}^{n+1} = p_{wf} \quad (5.38)$$

$$(\lambda + G) \frac{u_{dI}^{n+1} - u_{dI-1}^{n+1}}{\Delta r_d} + \lambda \frac{u_{dI}^{n+1}}{r_{dI}} = \sigma_h \quad (5.39)$$

Este esquema é incondicionalmente estável e consistente. A rigor, uma análise de estabilidade e consistência deveria ser feita. No entanto, como a solução numérica, realizada com o auxílio de um programa de computador não mostrou nenhum sinal de instabilidade, esta análise de estabilidade e consistência não foi realizada.

As equações discretizadas acima representam um sistema de equações lineares do tipo esparso, tridiagonal, em que o algoritmo de Thomas pode ser usado vantajosamente.

Na álgebra linear numérica, o algoritmo da matriz tridiagonal é conhecido como algoritmo de Thomas. Trata-se de uma forma simplificada de eliminação de Gauss que pode ser utilizada para solucionar sistemas de equações tridiagonais, WIKIPEDIA (2011).

A solução numérica foi realizada com o auxílio de um programa de computador denominado de Visual Basic – Excel, Microsoft, mediante utilização de macros no programa Excel Microsoft. Esta programação também pode ser realizada utilizando o programa comercial MATLAB, MatlabTM, ou em linguagem de programação FORTRAN.

No anexo há a transcrição completa do programa em Visual Basic – Excel da Microsoft.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

O modelo matemático composto por uma equação diferencial parcial de segunda ordem com as condições iniciais e de contorno foi resolvido pelo método das diferenças finitas mediante adimensionalização, discretização e posterior uso do algoritmo de Thomas. Este algoritmo foi utilizado na linguagem de programação computacional Visual Basic Excel, da Microsoft, para a obtenção das soluções numéricas.

Vale destacar a importância do correto estabelecimento das condições iniciais e de contorno para resolver a equação diferencial parcial. Isto é fundamental para a resolução adequada do problema.

Análises de sensibilidade foram realizadas mediante geração de vários gráficos de deformação na parede do poço, tensão normal radial e tensão normal circunferencial em função do tempo adimensional.

As análises compreendem uma queda brusca na pressão interna do poço, inicialmente em repouso, de 20%. Adicionalmente, foi aplicado aumento brusco na pressão interna do poço, inicialmente em repouso, de 20% e avaliados os resultados.

É importante ressaltar que todo este fenômeno ocorre em um intervalo de tempo muito curto, já que as variações de pressões são bruscas. Na verdade, ocorre um choque de pressão na parede interna do poço de petróleo.

Os resultados obtidos indicam a robustez e estabilidade do modelo matemático. A consistência foi ratificada pelos princípios da mecânica de rochas e

pelas propriedades físicas e elásticas da formação, ou rocha, utilizada no modelo matemático.

Evidentemente que, alterando-se as propriedades físicas e elásticas da rocha, módulo de *Poisson* e módulo de elasticidade, atravessada pela perfuração do poço e, inclusive, a massa específica do fluido de perfuração e o gradiente de fratura, os resultados poderão variar, significativamente, conforme a elasticidade da formação. Como o modelo matemático utiliza a equação da onda, em função das variações das propriedades supracitadas, as respostas da deformação na parede do poço e as tensões normais radial e circunferencial podem ser do tipo oscilatórias ou exponenciais.

Neste trabalho, conforme descrito no capítulo 3 foi utilizado uma única formação não reativa para a aplicação do modelo matemático desenvolvido e gerado os resultados. Nota-se que as respostas obtidas após as variações bruscas das pressões internas sugerem um amortecimento rápido da onda de pressão, mediante o decaimento de energia no meio. Isto remete ao grau de elasticidade da rocha utilizada na modelagem. Outras respostas poderão ser obtidas variando-se o grau de elasticidade do meio, a rocha, podendo-se ter respostas com tendências mais oscilatórias.

Os dados de entrada para o programa computacional constam na figura 3.2, compreendendo a litologia, geometria de poço e as tensões.

A primeira análise engloba o comportamento da deformação na parede interna do poço de petróleo após uma redução brusca da pressão de 20% da pressão hidrostática inicial, de 24.676 KPa, conforme a figura 6.1. O raio do poço é de 0,155 m, ou 15,5 cm, equivalente ao de um poço aberto de 12 ¼" de diâmetro. Os parâmetros elásticos de Lamé são $\lambda = 4,20$ GPa e $G = 6,25$ GPa. No eixo horizontal e vertical, o tempo e o deslocamento são adimensionais, respectivamente. Estes dados são os mesmos para todas as análises realizadas.

Na figura 6.1, verifica-se que imediatamente após o choque de pressão, queda brusca de 20% da pressão hidrostática inicial, o deslocamento da parede do poço apresenta um comportamento oscilatório, principalmente na superfície da parede interna do poço. À medida que o tempo passa, a deformação relativa aumenta gradativamente com o tempo de forma não linear. Na curva inferior, quando o poço ainda está em repouso, observa-se a presença de deslocamento e deformação da parede do poço resultantes da perturbação do estado originário das

tensões, antes da perfuração do poço. Na curva superior também observa-se uma deformação, em termos de deslocamento, da parede do poço.

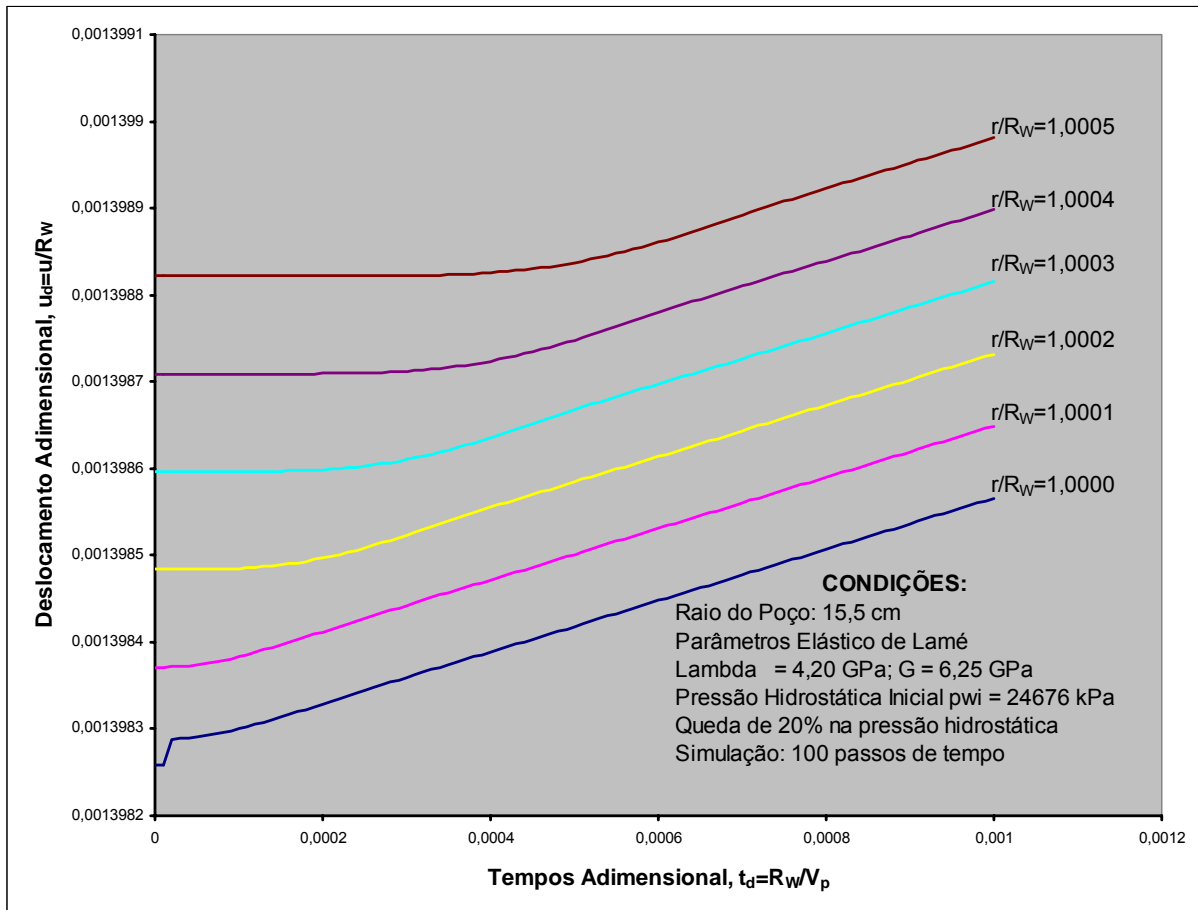


Figura 6.1: Deformação na parede do poço em função do tempo adimensional. Simulação com 100 passos de tempo.

Ainda, na figura 6.1, verifica-se que o comportamento do deslocamento na parede do poço e na formação com o tempo implica em uma diminuição do raio do poço. O poço tenderá a se fechar ou colapsar. Esta figura corresponde a uma simulação realizada em 100 passos de tempo para a análise das deformações em função da distância adimensional a partir da superfície interna da parede do poço.

Observa-se que todas as curvas apresentam um caráter oscilatório, principalmente a curva inferior, correspondendo à parede do poço. Este comportamento justifica-se devido à ocorrência de um choque brusco na parede do poço.

Os resultados apresentados nas figuras 6.2 e 6.3 também correspondem a simulações realizadas em 100 passos de tempo.

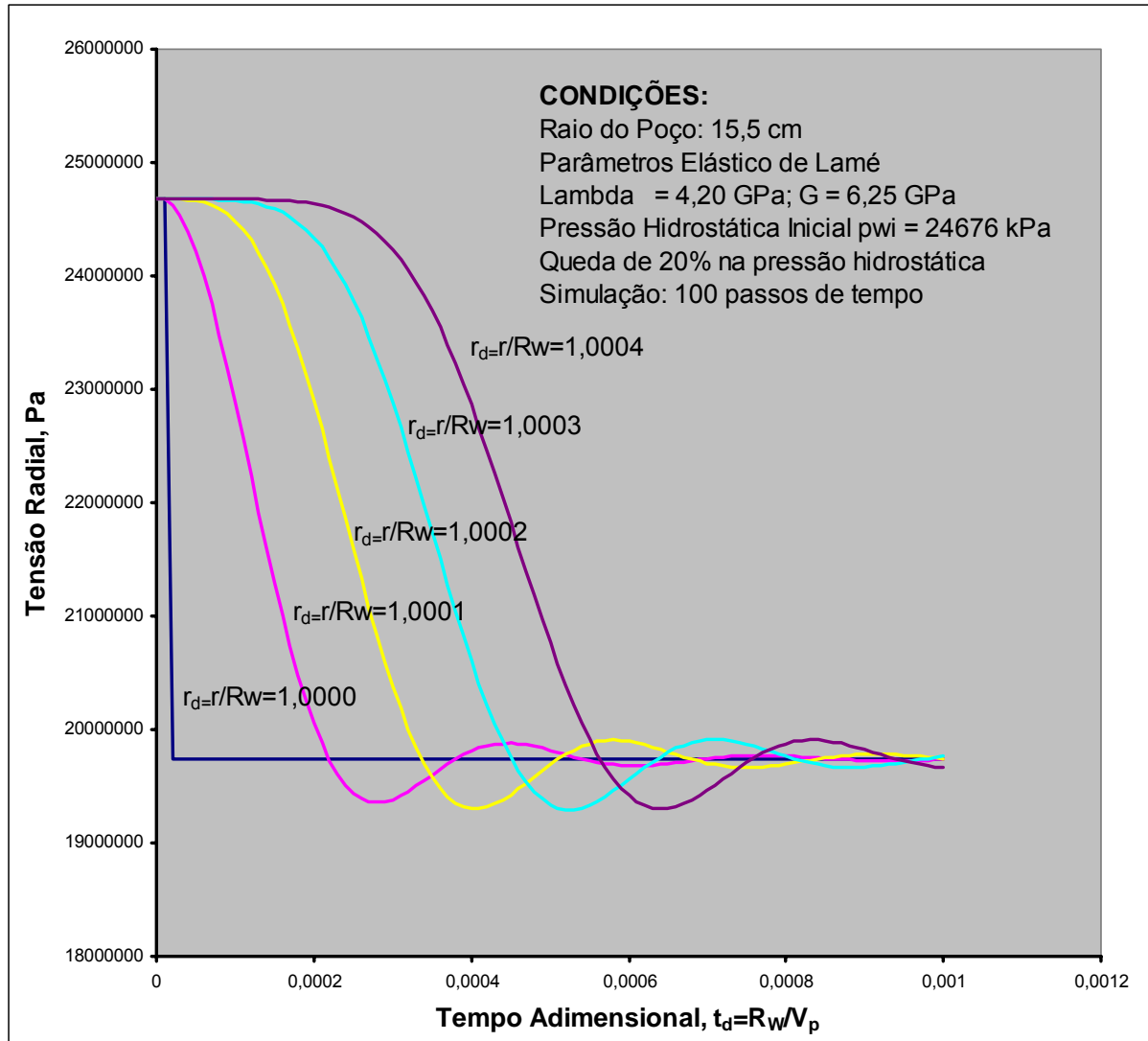


Figura 6.2: Tensão normal radial em função do tempo com queda de 20% na pressão hidrostática. Simulação com 100 passos de tempo.

Na figura 6.2, constata-se que a tensão radial parte do valor da pressão hidrostática inicial, dentro do poço, diminuindo rapidamente com o tempo enquanto a amplitude da oscilação decai de forma acentuada. O fenômeno ocorre rapidamente.

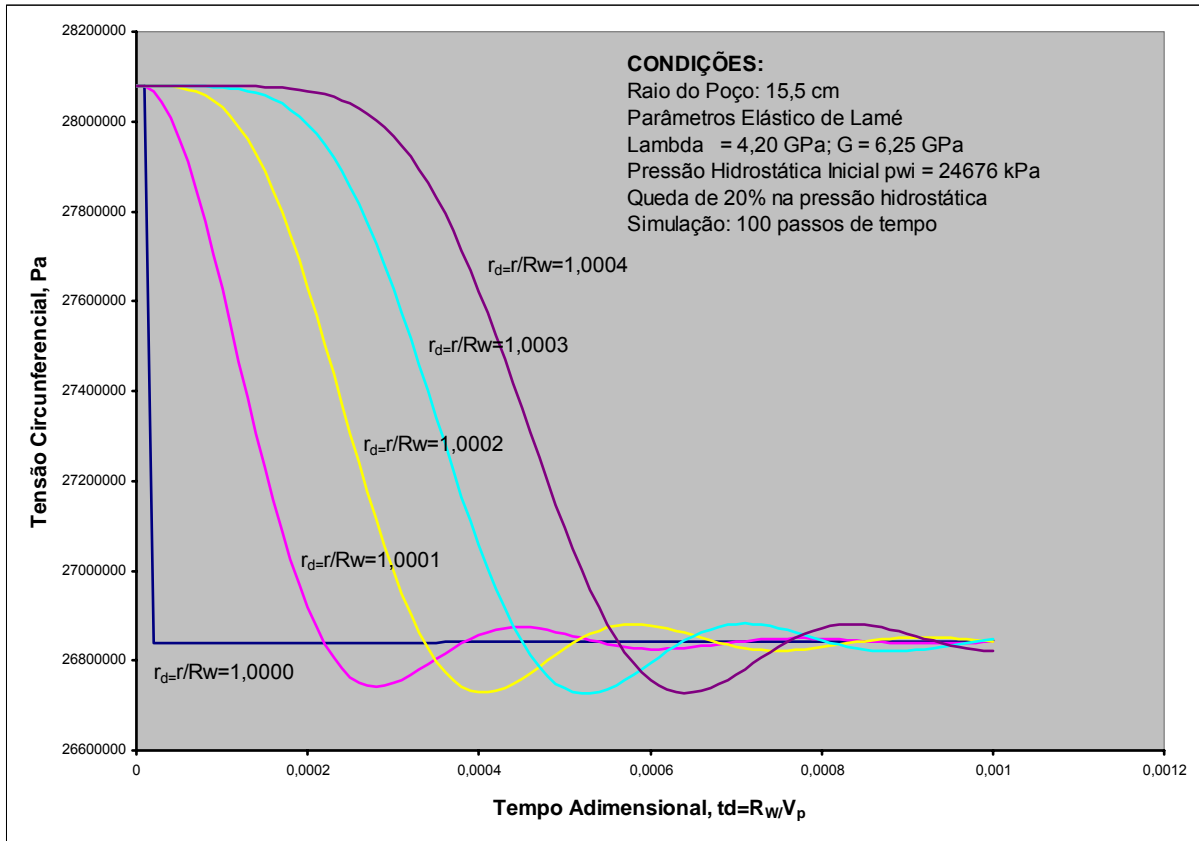


Figura 6.3: Tensão normal circunferencial em função do tempo com queda de 20% na pressão hidrostática. Simulação para 100 passos de tempo.

Na figura 6.3, constata-se que a tensão normal circunferencial tende para o valor da tensão horizontal original. Observa-se a presença de uma onda de choque seguida de queda no fluxo de potência. A frente de onda propaga-se rapidamente.

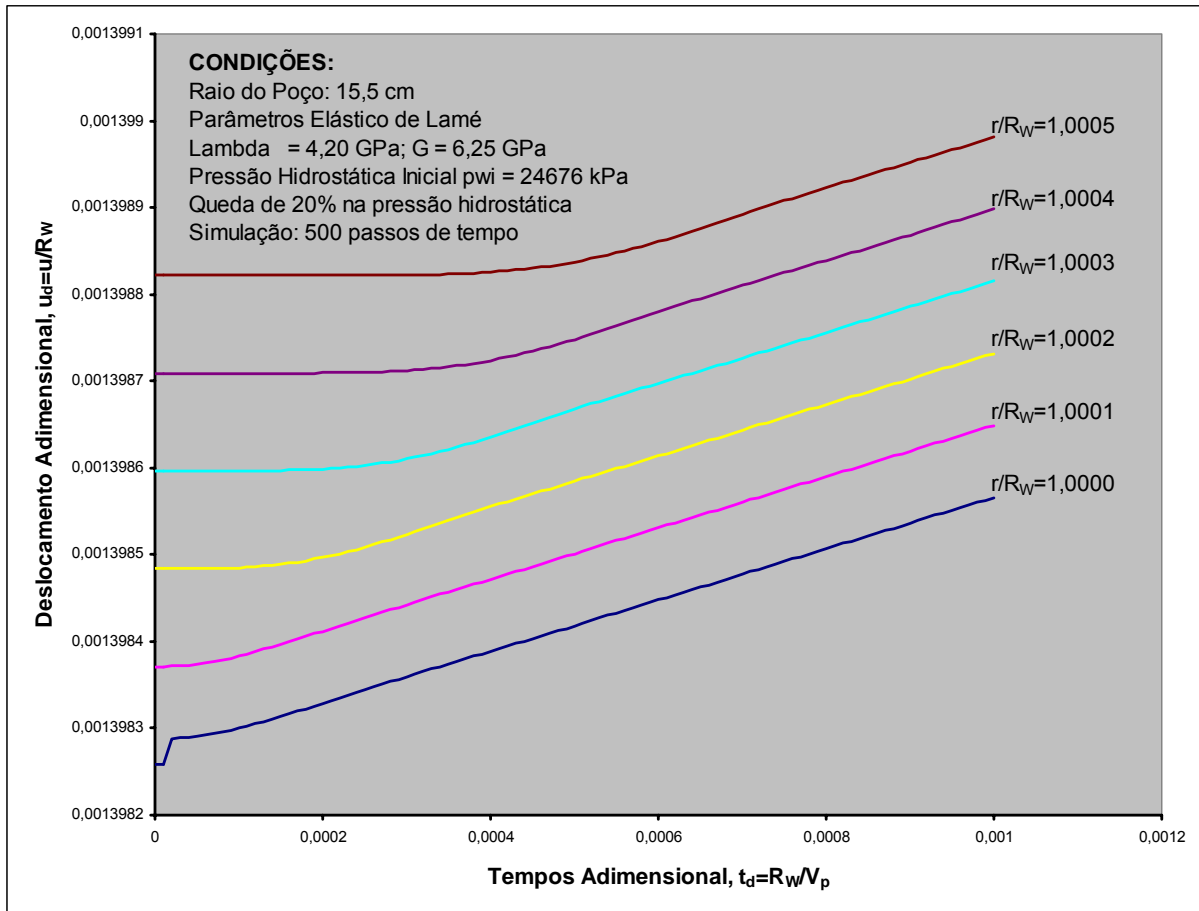


Figura 6.4: Deformação na parede do poço em função do tempo adimensional. Simulação com 500 passos de tempo.

A figura 6.4 apresenta um resultado similar ao da figura 6.1. Neste caso, houve o aumento do número de passos de tempo de 100 para 500. No entanto, a onda manteve o mesmo perfil de comportamento. Isto ratifica que o fenômeno, queda brusca de pressão, ocorre em um intervalo de tempo muito curto, decaindo logo em seguida à medida que a onda se propaga na formação.

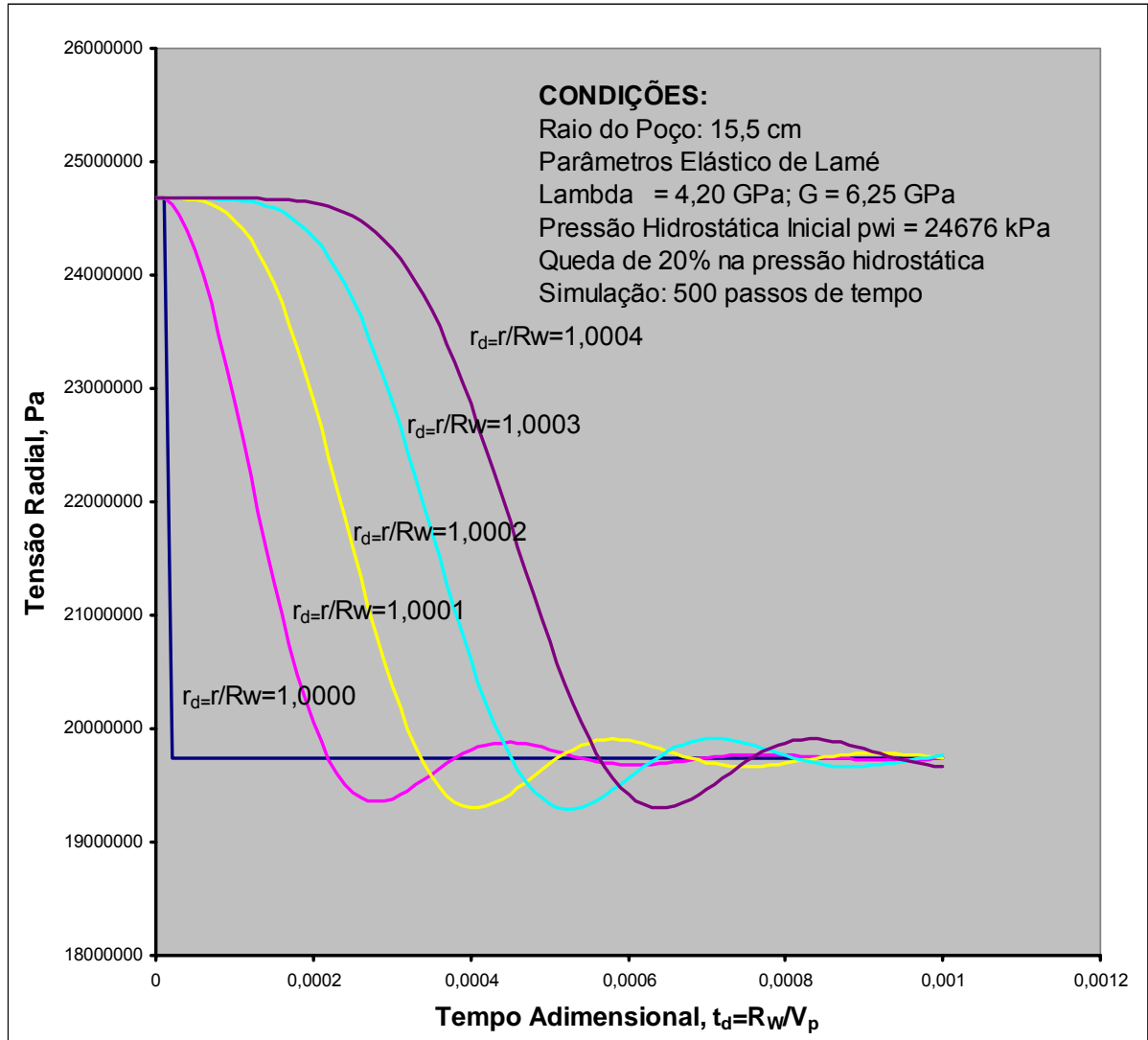


Figura 6.5: Tensão normal radial em função do tempo com queda de 20% na pressão hidrostática. Simulação com 500 passos de tempo.

A figura 6.5, com uma simulação de 500 passos de tempo, também apresenta um comportamento similar ao da figura 6.2. com 100 passos de tempo. Na figura 6.5, constata-se também que a tensão radial parte do valor da pressão hidrostática inicial, dentro do poço, diminuindo rapidamente com o tempo enquanto a amplitude da oscilação decai de forma acentuada. O fenômeno é muito rápido.

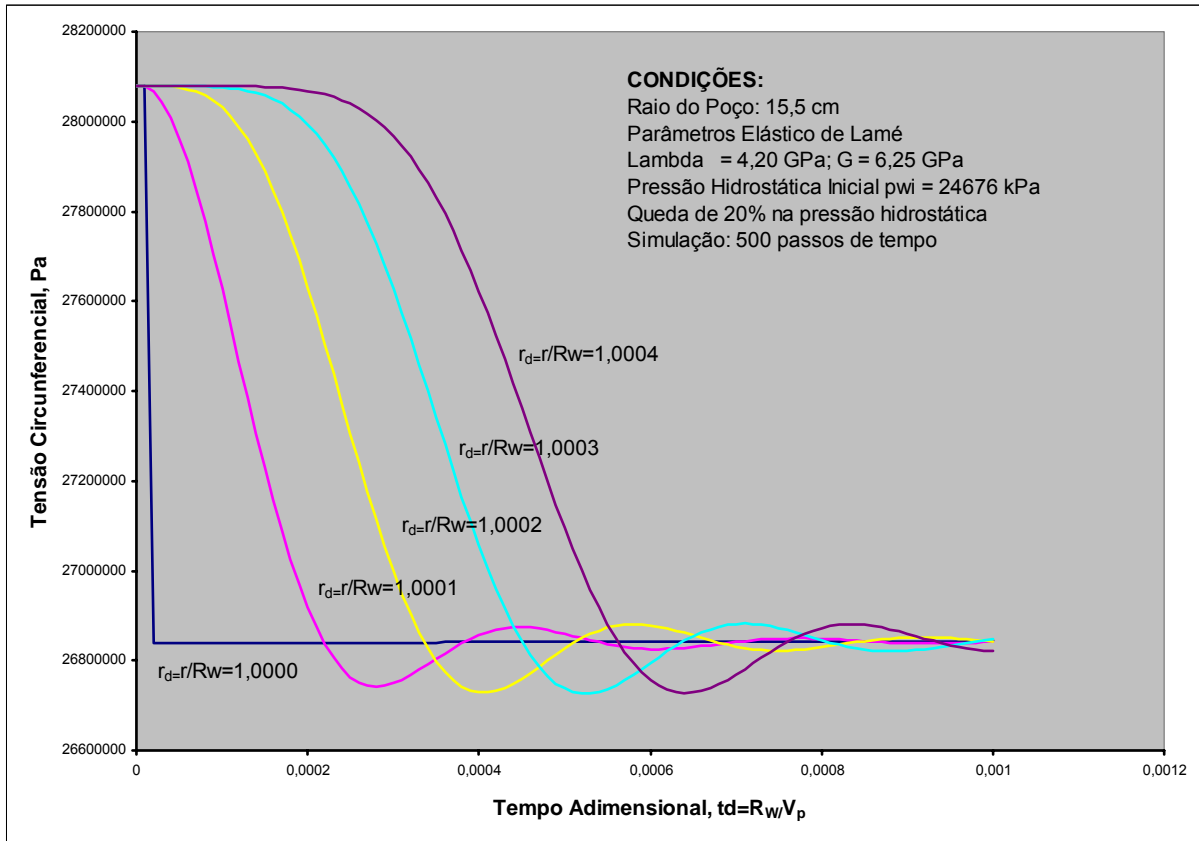


Figura 6.6: Tensão normal circunferencial em função do tempo com queda de 20% na pressão hidrostática. Simulação com 500 passos de tempo.

A figura 6.6 também apresenta comportamento similar ao da figura 6.3. Consta-se que a tensão normal circunferencial cai para o valor da tensão horizontal. Observa-se a presença de uma onda de choque que decai rapidamente.

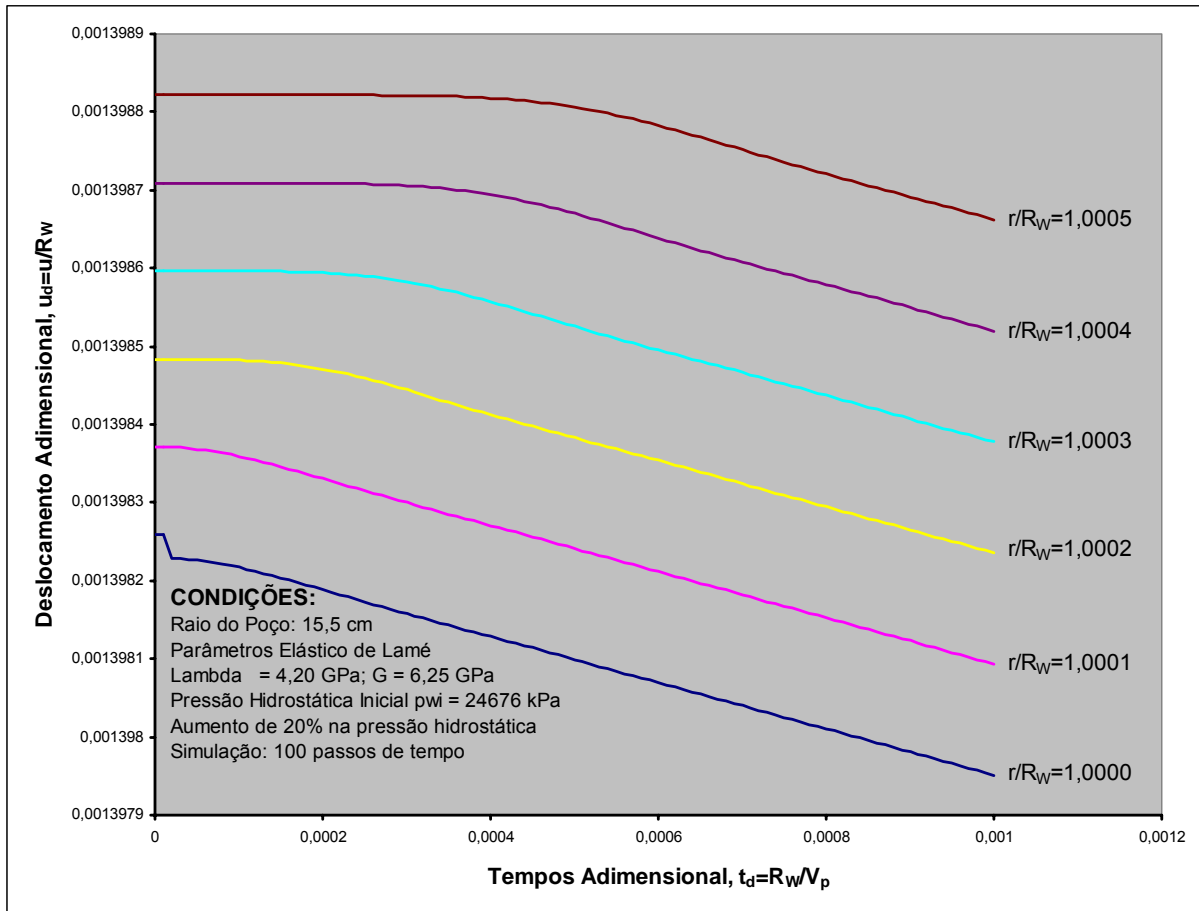


Figura 6.7: Deformação na parede do poço em função do tempo adimensional. Simulação com 100 passos de tempo.

A figura 6.7 apresenta um resultado com perfil similar ao da figura 6.1., com o mesmo número de passos de tempo, após um aumento brusco de 20% na pressão hidrostática inicial. A onda de choque manteve o mesmo perfil de comportamento, porém com sentido inverso. Quando se aplica uma sobrepressão brusca na parede do poço, este tenderá a se deformar no sentido da expansão, isto é, o poço “aumenta” de raio. Este resultado também ratifica que o fenômeno, choque ou aumento brusco de pressão interna, ocorre em um intervalo de tempo muito curto, decaindo logo em seguida à medida que a onda se propaga na formação.

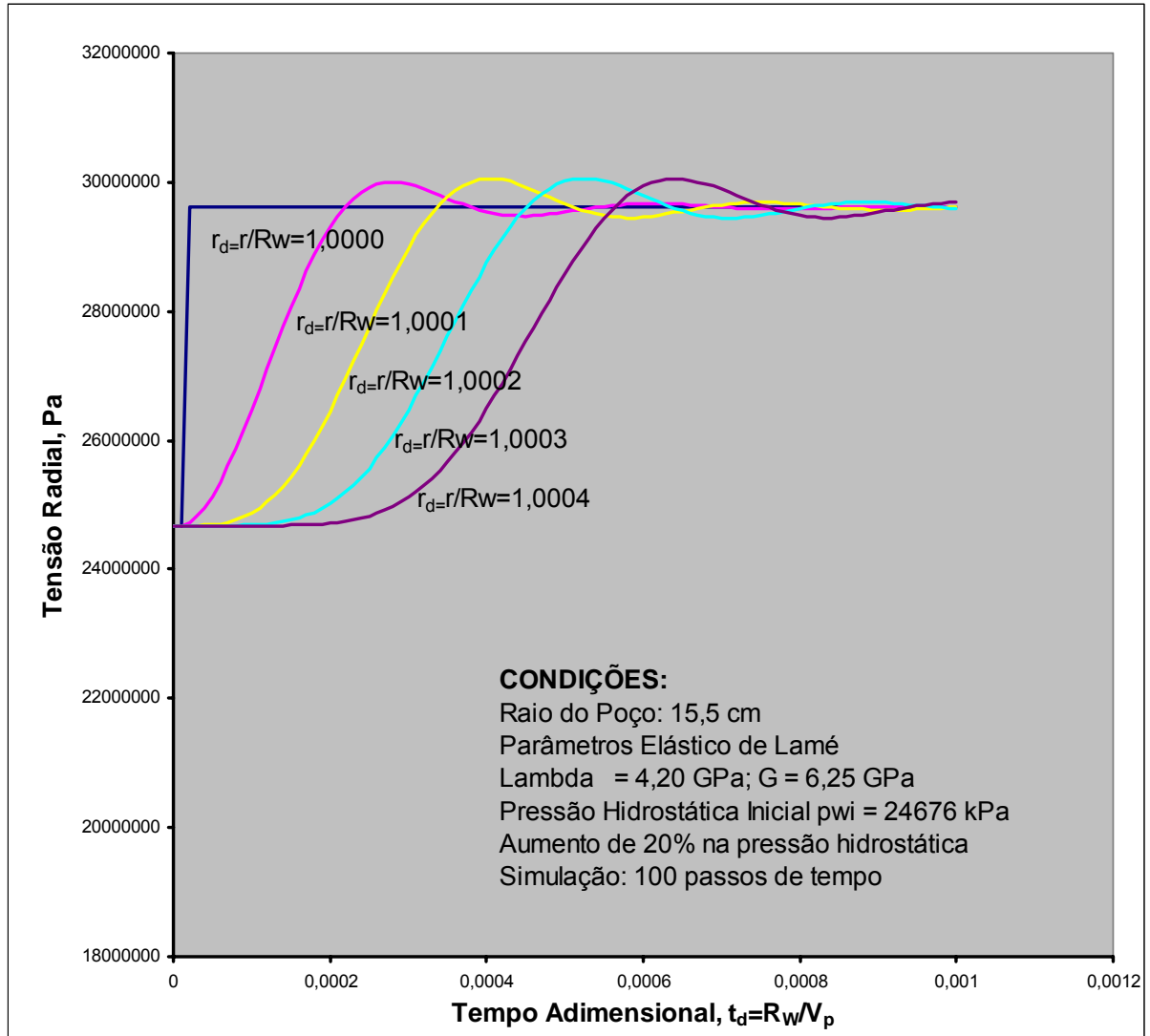


Figura 6.8: Tensão normal radial em função do tempo com aumento de 20% na pressão hidrostática. Simulação com 100 pasos de tempo.

Na figura 6.8, constata-se que a tensão radial também parte do valor da pressão hidrostática inicial, dentro do poço, aumentando rapidamente com o tempo enquanto a amplitude da oscilação decai e se estabiliza em um valor superior.

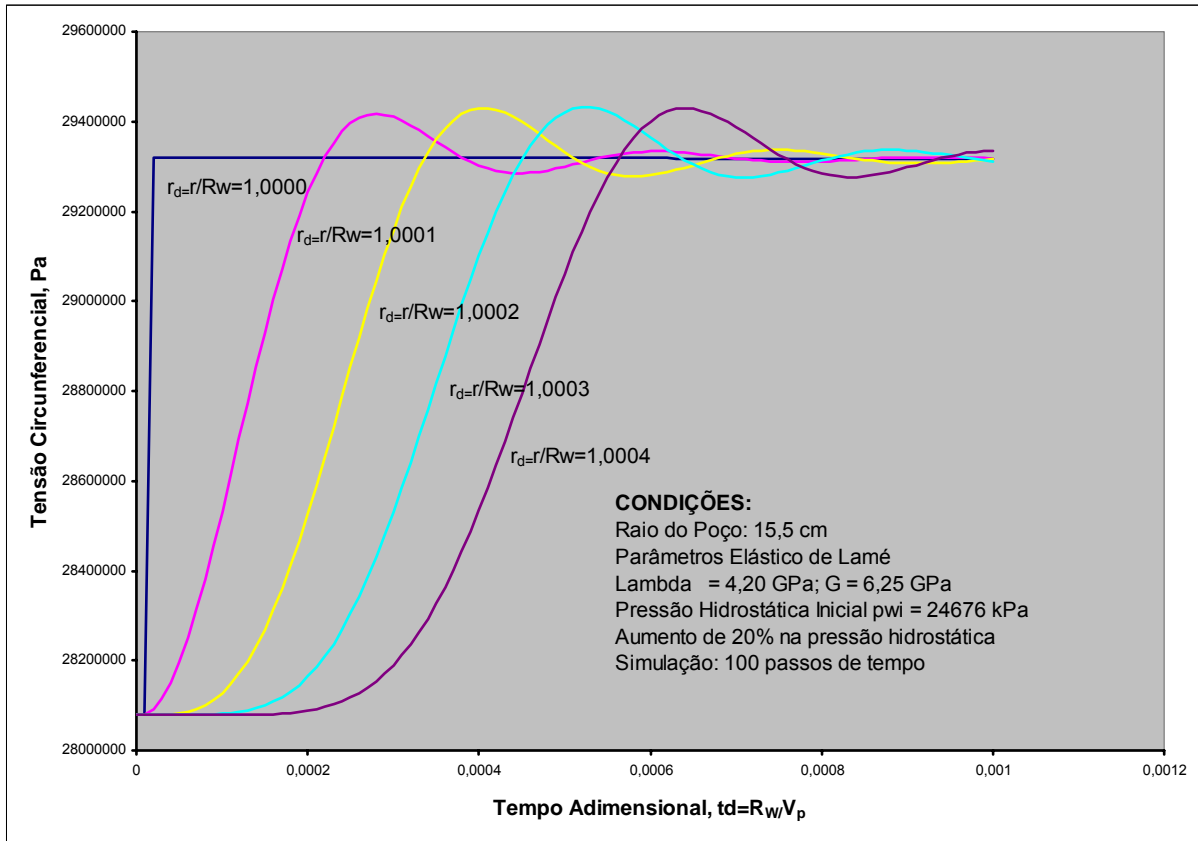


Figura 6.9: Tensão normal circunferencial em função do tempo com aumento de 20% na pressão hidrostática. Simulação com 100 passos de tempo.

A figura 6.9 apresenta perfil de comportamento similar ao da figura 6.3, porém em sentido inverso. Desta vez, observa-se um aumento repentino na pressão interna tendendo a “abrir” ou fraturar o poço. Este fenômeno tende a aumentar a circunferência do poço. Observa-se a presença de uma onda que depois de aumentar a amplitude subitamente, cai levemente e se mantém em um valor superior, atenuando-se com o tempo, decaindo ao longo do meio rochoso.

Finalmente, em fenômenos desta natureza, verifica-se que a vibração provocada por um choque brusco, queda ou aumento, na pressão interna de um poço de petróleo será rapidamente amortecida em um decaimento da perturbação.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 CONCLUSÕES

Esta tese teve como objetivo principal propor uma modelagem matemática para o cálculo da deformação e das tensões radiais e circunferenciais na parede de um poço de petróleo quando submetido a um diferencial brusco de pressão interna. O modelo é composto por uma equação diferencial parcial e de condições iniciais e de contorno e resolvido numericamente por diferenças finitas via algoritmo de Thomas. Esta modelagem foi validada consistentemente, e depois aplicada e avaliada quanto à sua integridade e estabilidade.

Os resultados das análises de sensibilidade, sob diversas condições, indicaram uma excelente aproximação do fenômeno com a prática.

Em resumo, esta pesquisa revelou que:

1. Não há trabalho semelhante para a descrição e cálculo das deformações e tensões radiais e circunferenciais na parede de um poço de petróleo quando submetido às variações bruscas de pressão interna dos fluidos;
2. A modelagem matemática com as equações de equilíbrio (balanço da quantidade de movimento linear), a lei de Hooke e os parâmetros elásticos de Lamé são adequados ao cálculo das deformações na parede interna de um poço de petróleo, das tensões normais radiais e das tensões normais circunferenciais;

3. A equação governante, deduzida a partir das equações de equilíbrio, da Teoria da Elasticidade e das equações constitutivas dos materiais, é consistente e robusta para a descrição do fenômeno e modelagem matemática;
4. O choque ou diferencial brusco de pressão interna causa uma deformação ou perturbação acentuada bem maior na vizinhança do poço, decrescendo rapidamente à medida que a onda se propaga afastando-se do poço;
5. A atenuação ou amortecimento da onda de choque decai rapidamente em função das características constitutivas do meio, a rocha;
6. A análise demonstrou que praticamente não há diferenças significativas entre as simulações realizadas com 100 e 500 passos de tempo, tanto para a queda como para o aumento brusco de pressão;
7. Os resultados reforçam que o fenômeno ocorre em um intervalo de tempo muito curto, e dependendo da magnitude dos parâmetros envolvidos, poderá causar o colapso ou fraturamento no poço de petróleo;
8. A análise precisa das tensões normais radiais e circunferenciais é fator determinante para a correta caracterização do problema e seu equacionamento;
9. O choque ou variação brusca, queda ou aumento, da pressão interna em um poço de petróleo apresenta um comportamento oscilatório;
10. O estudo da geomecânica é imprescindível para a manutenção da integridade do poço, desde a fase de projeto, planejamento até a sua execução e operação normal da produção de hidrocarbonetos e injeção de água ou gás.

Finalmente, vale destacar a importância do estudo de mecânica de rochas para equacionar adequadamente o cálculo das tensões e deformações da parede em poços submetidos a um diferencial brusco de pressão interna, seja a poço revestido ou aberto.

7.2 RECOMENDAÇÕES

Como primeira recomendação para se fazer análises cada vez mais precisas, especificamente para a análise e cálculos das deformações e tensões na parede do poço, é necessário definir, adequadamente, um bom modelo teórico com as respectivas condições iniciais e de contorno.

Deve-se ressaltar que o sucesso deste trabalho está diretamente relacionado ao equilíbrio entre o conhecimento da ciência de mecânica das rochas, geomecânica, com a experiência em engenharia de perfuração e completação de poços de petróleo. Isto é importante para a validação do modelo matemático desenvolvido.

Em resumo, como recomendações para futuras pesquisas podem-se citar:

1. Aplicação da modelagem matemática proposta para poços direcionais, inclinados, e horizontais, e, no limite, para poços de geometria complexa;
2. Evolução e aplicação da modelagem matemática proposta para poços verticais, direcionais, horizontais e de geometria complexa revestidos, cimentados e equipados com sistema de contenção de produção de areia (tubos telados). Isto possibilitará o cálculo das tensões máximas admissíveis, de tração e de colapso, nos equipamentos instalados nos poços;
3. Expansão do modelo matemático para poços que atravessem rochas e formações não tectonicamente relaxadas, isto é, com tensões tectônicas ainda ativas. Naturalmente, isto exigirá o estabelecimento de condições iniciais e de contorno mais complexas para representar o fenômeno o mais próximo da realidade;
4. Aperfeiçoamento do modelo matemático para poços situados em ambientes onde a tensão de sobrecarga, ou de “overbunden”, exerça papel significativo ou apresente valores anormalmente altos;
5. Aplicação do modelo matemático para a determinação de limites de operação para a partida ou repartida da Bomba Centrífuga Submersa (B.C.S.) em poços em ambientes com diferencial de pressão elevado que poderá causar o colapso do poço completado (coluna de produção,

bomba centrífuga ou tubos telados). Estes limites determinados poderão evitar a perda do poço completado;

6. Utilização do modelo matemático seguido da aplicação de um critério de falha, por exemplo, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Griffith para calcular as pressões críticas dentro do poço, nas quais haverá o limiar de ruptura por compressão ou fraturamento. A ruptura por desmoronamento é chamada de tensão de colapso inferior;
7. Verificação da validade dos critérios de falhas em condições dinâmicas;
8. Utilização da modelagem matemática para o cálculo das deformações e tensões na parede do poço para diferentes tipos de litologias, variando-se os parâmetros elásticos de Lamé, inclusive a massa específica do fluido de perfuração;
9. Elaboração de metodologia para construir uma solução analítica na forma de uma série para a modelagem matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARORA, A., TOMAR, S.K. (2007) Elastic Waves Along a Cylindrical Borehole in a Poroelastic Medium Saturated by Two Immiscible Fluids. *J. Earth System Science*. 116, No 3: 225-234.
- BERGER, J. R., MARTIN, P. A. & MCCAFERY, S. J. “Time Harmonic Torsional Waves in a Composite Cylinder with an Imperfect Interface”, *J. Acoust. Soc. Am.* 107(3) 1161–1167, 2000.
- BIOT, M. A., “General Theory of Three-Dimensional Consolidation”, *J. Appl. Phys.* 12, pp 155-164, 1941.
- BIOT, M. A., “Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Borehole Containing a Fluid”, *J. Appl. Phys.* 23 997–1005, 1952.
- BRUNETTI, FRANCO. *Mecânica dos fluidos*. São Paulo: Pearson, 2005. 410 p.
- CAMPOS, W., “Variação de Pressão em Poços de Petróleo devida a Movimento de Colunas”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. 1986.
- CHENG, C. H. & TOKSOZ, M. N., “Elastic Wave Propagation in a Fluid Filled Borehole and Synthetic Acoustic Logs”, *Geophysics*, 46 1042–1053, 1981.
- CHENG, C. H., JINZHONG, Z. AND BURNS, D. R., “Effects of in Situ Permeability on the Propagation of Stoneley (Tube) Waves in a Borehole”, *Geophysics* 52(9) 1279–1289, 1987.
- DANESHY, A.A., “ Impact of Off-Balance Fracturing on Borehole Stability & Casing Failure”, Paper SPE 93620, presented at the 2005 SPE Western Regional Meeting held in Irvine, CA, U.S.A., 2005.

- DETOURNAY, E. & CHENG, A. H-D., “Poroelastic Response of a Borehole in a Non-Hydrostatic Stress Field”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.& Geomech.* , Vol 25, nº 3, pp 171-182, 1988.
- FJAER, E., HOLT, R.M., HORSRUD, P., RAAEN, A. M. & RISNES, R., *Petroleum Related Rock Mechanics*, 1nd Edition – Elsevier – *Developments in Petroleum Science* 53, 1992.
- FJAER, E., HOLT, R.M., HORSRUD, P., RAAEN, A. M. & RISNES, R., *Petroleum Related Rock Mechanics*, 2nd Edition – Elsevier – *Developments in Petroleum Science* 53, 2008.
- HORTON, C. W., “Secondary Arrivals in a Well Velocity Survey”, *Geophysics*, Vol. 8, pp 290-296, 1943.
- KHAFIZOV, R.M., KHUSAINOV, I.G. & SHAGAPOV, V. SH., “Dynamics of the Pressure Relaxation in a “Depressurized” Borehole”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 73, pp 443-448, 2009.
- KURKJIAN, A. L. & CHANG, SHU-KONG., “Acoustic Multipoles in Fluid-Filled Boreholes”, *Geophysics* 51 148–163, 1986.
- MAURER, W. C. & AIME, J. M., “Shear Failure of Rock Under Compression”, Paper SPE 1054 presented at SPE – University of Texas Conference on Drilling and Rock Mechanics, 1965.
- MELIANDE, P., NASCIMENTO, E.A., DANDOULAKIS, J.P., MASSA, A.L.L.: “Surge Pressure Analysis for Bijupira and Salema Water Injection System” , paper OTC 19365 presented at the 2008 Offshore Technology Conference, Houston, Texas, 5-8 May 2008.
- MIRANDA, A. V., CAMPOS, W., MARTINS, F. F., “Determinação do Coeficiente Elástico Transversal da Formação Através do Tempo Característico das Ondas de Pressão Dentro do Poço”. *Petro & Química*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, p. 58 - 64, dez. 2008.
- MORALES, R. H., WEBB, T. R. & HOLLIER, R., “Borehole Failure: Safe Drawdown Pressures and Wellbore Damage Radius”, Paper SPE 58789, presented at the 2000 SPE International Symposium on Formation damage Control held in Lafayette, Louisiana, U.S.A, 2000.
- NETO, A. V. M., CAMPOS, W., MARTINS, F. F., “Determinação do Coeficiente Elástico Transversal da Formação Através do Tempo Característico das Ondas de

- pressão Dentro do Poço”, III ENAHPE – Encontro Nacional de Hidráulica de Poços- Jun 2009.
- PAILLET, F. L. & WHITE, J. E., “Acoustic Modes of Propagation in The Borehole and Their Relationship to Rock Properties”, *Geophysics* 47 1215–1228, 1982.
- PAILLET, F. L. & CHENG, C. H. “A Numerical Investigation of Head Waves and Leaky Modes in Fluid Filled Boreholes”, *Geophysics* 51(7) 1438–1449, 1986.
- RAMA RAO, V. N. & VANDIVER, J. K., “Acoustics of Fluid-Filled Boreholes With Pipe: Guided Propagation and Radiation”, *J.Acoust.Soc.Am.* 105(6) 3057–3066, 1999.
- ROCHA, LUIZ ALBERTO SANTOS E AZEVEDO, CECÍLIA TOLEDO DE., “Buscando o Estado-da-Arte nas Estimativas de Geopressões”, *Boletim Técnico da Produção de Petróleo, Rio de Janeiro – Volume 1, nº 1, pp-67-93, Jun 2006.*
- ROCHA, LUIZ ALBERTO SANTOS E AZEVEDO, CECÍLIA TOLEDO DE. – *Projetos de Poços de Petróleo – Geopressões e Assentamento de Colunas de Revestimentos.* Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2007.
- RODRIGUES, VALDO FERREIRA, FROTA, HELDER MAMEDE, LOURES, LUIZ GERALDO, SIQUEIRA, FERNANDO D.: “Hydrate Blockage in Subsea Water Injection Wells - Causes and Preventive Procedures”, paper SPE 120273 apresentado na “2009 SPE European Formation Damage Conference” ocorrido em Scheveningen, The Netherlands, 27–29 Maio 2009.
- ROSENBAUM, J. H., “Synthetic Micro-Seismograms: Logging in Porous Formations”, *Geophysics* 39 14–32, 1974.
- SANTARELLI, F.J., SKOMEDAL, E., MARKESTAD, P. AND NASVIG, H.: “Sand Production on Water Injectors: Just How Bad Can It Get?”, paper SPE 47329 presented at the SPE/IRSM Eurock 98 held in Trondheim, Norway, 8-10 July 1998
- SHARMA, M. D. AND GOGNA, M. L., “Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore in a Liquid Saturated Porous Solid”, *Geophys. J. Int.* 103 47–54, 1990.
- STILKE, G. “On Elastic Surface Waves at a Cylindrical Hole in an Infinite Solid”, *Geophysical Prospecting* 7(3) 273–286, 1959.
- TOMAR, S. K. & KUMAR, R., “Elastic Wave Propagation in a Cylindrical Bore Situated in a Micropolar Elastic Medium With Stretch”, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 109(4) 425–433, 1999.
- TOMASI, I. V. & NABUCO, P.F. V., “Estudo de Geomecânica para Perfuração dos Poços da Área de Papa-Terra”, *Apostila PETROBRAS, Out. 2007.*

- VASHISHTH, A. K., KHURANA, P., “Wave Propagation Along a Cylindrical Borehole in an Anisotropic Poroelastic Solid”, *Geophys. J. Int.* 161 295–302, 2005.
- VAZIRI, H., NOURI, A., HOVEM, K., WANG, X.: “Computation of Sand Production in Water Injectors”, paper SPE 107695 presented at the European Formation Damage Conference held in Scheveningen, The Netherlands, 30 May–1 June 2007
- WANG, X., HOVEM, K., MOOS, D., AND QUAN, Y.: “Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity”, paper SPE 112282 presented at the 2008 SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, held in Lafayette, Louisiana, U.S.A., 13-15 February 2008.
- WHITE, J. E., “Elastic Waves Along a Cylindrical Bore”, *Geophysics* 27(3) 327–333, 1962.
- WHITE, J. E., “Seismic Waves: Radiation, Transmission and Attenuation”, Denver Research Center, Marathon oil Company. McGraw-Hill International Series in The Earth Sciences, 1965.
- WIKIPEDIA., “Tridiagonal Matrix Algorithm”, *Numerical Linear Algebra*;
<http://www.wikipedia.org> en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm em 28/08/2011 página mantida pela Wikimedia Foundation, Inc.
- WYLIE, E.B. AND STREETER, V.L.: “Fluid Transients”, McGraw-Hill, New York (1978).
- ZHOU, S., HILLIS, R.R. & SANDIFORD, M., “On the Mechanical Stability of Inclined Wellbores”, *SPE Drilling and Completion*, june 1996.

ANEXO

Este anexo apresenta o programa utilizado para os cálculos das deformações na parede do poço, das tensões normais radiais e das tensões normais circunferenciais ou tangenciais em linguagem Visual Basic, mediante a utilização de macros no Excel - Microsoft. Este programa utiliza o algoritmo de Thomas para resolver a Matriz Tridiagonal utilizada para resolver o sistema de Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.) do modelo matemático.

Programa:

Sub simu()

'Este programa calcula as tensões no choque

'Variáveis: rd: distância adimensional

'Vp: velocidade da onda primária

Dim rd(1000001), rdm(1000001), ud1(1000001), ud2(1000001), ud3(1000001)

Dim a(1000001), b(1000001), c(1000001), d(1000001)

Dim sigr(1000001), sigt(1000001)

Cells(2, 3) = "Executando"

sigmah = Cells(21, 3) 'Tensão horizontal

lambda = Cells(6, 3) 'Parâmetros de Lamé

G = Cells(7, 3) 'Parâmetros de Lamé

drd = Cells(16, 3)

```

dtd = Cells(15, 3)
pw0 = Cells(8, 3) 'Pressão hidrostática inicial
pw1 = Cells(9, 3) ' Pressão hidrostática final
Rwdinf = Cells(14, 3)
passos = Cells(22, 3)
'Cálculos preliminares
ii = (Rwdinf - 1) / drd + 1 'Calcula o número de pontos na malha espacial
iii = ii - 2
Cells(17, 3) = ii
rd(1) = 1
Cells(3, 7) = 1
Cells(5, 7) = rd(1)
For i = 2 To ii
  rd(i) = rd(i - 1) + drd
Next i
'Calculo dos raios médios rd(i+1/2)=rdm(i)
For i = 1 To ii - 1
  rdm(i) = (rd(i + 1) + rd(i)) / 2
Next i
For i = 2 To 9
  Cells(3, 6 + i) = i
  Cells(5, 6 + i) = rd(i)
Next i
For i = iii To ii
  Cells(3, 17 + i - iii) = i
  Cells(5, 17 + i - iii) = rd(i)
Next i
'Condições iniciais
td = 0
n = 0
'Calculado a partir da EDP, considerando a derivada temporal nula
'-----
'Condição de contorno interna. Pressao no poço.
pw = pw0

```

'Cálculo de ud1 no tempo inicial

$$b(1) = -1 / drd + \lambda / (\lambda + 2 * G) / rd(1)$$

$$b(ii) = 1 / drd + \lambda / (\lambda + 2 * G) / rd(ii)$$

For i = 2 To ii - 1

$$b(i) = -rd(i) / drd ^ 2 * (1 / rdm(i) + 1 / rdm(i - 1))$$

Next i

$$c(1) = 1 / drd$$

For i = 2 To ii - 1

$$c(i) = rd(i + 1) / rdm(i) / drd ^ 2$$

Next i

For i = 2 To ii - 1

$$a(i) = rd(i - 1) / rdm(i - 1) / drd ^ 2$$

Next i

$$a(ii) = -1 / drd$$

$$d(1) = pw / (\lambda + 2 * G)$$

For i = 2 To ii - 1

$$d(i) = 0$$

Next i

$$d(ii) = \sigma_{mah} / (\lambda + 2 * G)$$

Call Thomas(a, b, c, d, ud1, ii)

'-----

'Cálculos das tensões radial e circunferencial

For i = 1 To ii

$$\text{sigr}(i) = (\lambda + 2 * G) * (ud1(i + 1) - ud1(i)) / drd + \lambda * ud1(i) / rd(i)$$

$$\text{sigt}(i) = \lambda * (ud1(i + 1) - ud1(i)) / drd + (\lambda + 2 * G) * ud1(i) / rd(i)$$

Next i

'Imprime

Call impressao(n, ii, iii, ud1, 7)

Call impressao(n, ii, iii, sigr, 23)

Call impressao(n, ii, iii, sigt, 39)

'=====

'Condições iniciais. O meio estaria em repouso.

td = td + dtd

n = n + 1

```

For i = 1 To ii
  ud2(i) = ud1(i)
Next i
'Cálculos das tensões radial e circunferencial
For i = 1 To ii - 1
  sigr(i) = (lambda + 2 * G) * (ud2(i + 1) - ud2(i)) / drd + lambda * ud2(i) / rd(i)
  sigt(i) = lambda * (ud2(i + 1) - ud2(i)) / drd + (lambda + 2 * G) * ud2(i) / rd(i)
Next i
'Imprime
Call impressao(n, ii, iii, ud2, 7)
Call impressao(n, ii, iii, sigr, 23)
Call impressao(n, ii, iii, sigt, 39)
'=====
'Iterações-Cálculo de ud3
Do While (n < passos) 'Controla o tempo de parada
  td = td + dtd
  n = n + 1
  porc = n / passos * 100
  Cells(3, 3) = porc
'Condição de contorno interna. Pressao no poço. Rodar durante algum tempo com a
pressão original.
  pw = pw1
  'If (n < 50) Then pw = pw0 desconsiderado
'Cálculo de ud3 no tempo seguinte
  b(1) = -1 / drd + lambda / (lambda + 2 * G) / rd(1)
  b(ii) = 1 / drd + lambda / (lambda + 2 * G) / rd(ii)
  For i = 2 To ii - 1
    b(i) = -1 / dtd ^ 2 - rd(i) / drd ^ 2 * (1 / rdm(i) + 1 / rdm(i - 1))
  Next i
  c(1) = 1 / drd
  For i = 2 To ii - 1
    c(i) = rd(i + 1) / rdm(i) / drd ^ 2
  Next i
  For i = 2 To ii - 1

```

```

    a(i) = rd(i - 1) / rdm(i - 1) / drd ^ 2
Next i
a(ii) = -1 / drd
d(1) = pw / (lambda + 2 * G)
For i = 2 To ii - 1
    d(i) = -2 * ud2(i) / dtd ^ 2 + ud1(i) / dtd ^ 2
Next i
d(ii) = sigmah / (lambda + 2 * G)
Call Thomas(a, b, c, d, ud3, ii)
'Cálculos das tensões radial e circunferencial
For i = 1 To ii - 1
    sigr(i) = (lambda + 2 * G) * (ud3(i + 1) - ud3(i)) / drd + lambda * ud3(i) / rd(i)
    sigt(i) = lambda * (ud3(i + 1) - ud3(i)) / drd + (lambda + 2 * G) * ud3(i) / rd(i)
Next i
'Imprime
Call impressao(n, ii, iii, ud3, 7)
Call impressao(n, ii, iii, sigr, 23)
Call impressao(n, ii, iii, sigt, 39)
'=====
'Transfere para novo passo
For i = 1 To ii
    ud1(i) = ud2(i) 'Transfere as variáveis para um novo passo
    ud2(i) = ud3(i)
Next i
Loop
Cells(2, 3) = "Finalizado"
End Sub

Sub Thomas(a, b, c, v, x, n)
'    a - sub-diagonal (significa diagonal inferior, abaixo da diagonal principal) a(2),
a(3), ...
'    b - diagonal principal b(1), b(2), ...
'    c - sup-diagonal (significa diagonal superior, acima da diagonal principal) c(1),
c(2), ...

```

```
' v - parte da direita v(1), v(2), ...
' x - a resposta x(1), x(2), ...
' n - número de equações
  Dim bp(1000001), vp(1000001)
' Copiar as variáveis b e v de forma que elas permaneçam inalteradas por esta sub
  For i = 1 To n
    bp(i) = b(i)
    vp(i) = v(i)
  Next i
```

"O primeiro passo (determinação dos coeficientes):

```
  For i = 2 To n
    m = a(i) / bp(i - 1)
    bp(i) = b(i) - m * c(i - 1)
    vp(i) = v(i) - m * vp(i - 1)
  Next i
  x(n) = vp(n) / bp(n)
```

"O Segundo passo (retro-substituição)

```
  For i = n - 1 To 1 Step -1
    x(i) = (vp(i) - c(i) * x(i + 1)) / bp(i)
  Next i
```

'Fim da subrotina – Solução da Matriz Tridiagonal

End Sub

Sub impressao(n, ii, iii, v, posi)

```
  For i = 1 To 9
    Cells(6 + n, posi - 1 + i) = v(i)
  Next i
  For i = iii To ii
    Cells(6 + n, posi + 10 + i - iii) = v(i)
  Next i
```

End Sub

