

# SOLUÇÃO GERAL PARA O FLUXO DE GÁS EM UM MEIO POROSO

Abelardo Borges Barreto Jr.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENTE - UENF  
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO -  
LENEP

Macaé, Janeiro de 2011

---

# SOLUÇÃO GERAL PARA O FLUXO DE GÁS EM UM MEIO POROSO

Tese de Doutorado

Abelardo Borges Barreto Jr.

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da  
Universidade Estadual do Norte Fluminense,  
como parte das exigências para obtenção do título de  
Doutor em  
Engenharia de Reservatório e de Exploração de Petróleo.

Aprovada em 15 de Dezembro de 200?.

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Albert C. Reynolds, PhD

---

Prof. Carlos Enrique Pico Ortiz, DSc

---

Prof. Dan Marchesin, PhD

---

Prof. Erdal Oskan, PhD

---

Prof. Vlatcheslav Ivanovich Priimenko, PhD .

---

Prof. Adolfo Puime Pires, DSc (Orientador)

---

Prof. Alvaro Marcello Marco Peres, PhD (Co-Orientador)

À Carla, minha companheira de todos os momentos,  
aos meus filhos Helena e Pedro  
e aos meus pais Abelardo e Alcidéa (*in memoriam*)

Ao ...

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>7</b>
3.1	Formulação do Problema . . . . .	7
3.2	Método de Expansão Assintótica . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Soluções para Vazão Constante</b>	<b>15</b>
4.1	Radial Infinito . . . . .	15
4.1.1	Formulação Matemática . . . . .	15
4.1.2	Validação . . . . .	19
4.2	Poço Próximo a uma Falha Selante . . . . .	23
4.2.1	Formulação Matemática . . . . .	25
4.2.2	Validação . . . . .	27
4.3	Fratura de Extensão Infinita . . . . .	31
4.3.1	Formulação Matemática . . . . .	32
4.3.2	Validação . . . . .	34
4.4	Fratura Hidráulica de Condutividade Uniforme . . . . .	36
4.4.1	Formulação Matemática . . . . .	36
4.4.2	Validação . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Soluções para Vazão Variável</b>	<b>41</b>
5.1	Aplicação do Princípio de Duhamel como Solução da Equação da Difusividade do Gás . . . . .	41
5.2	Solução Geral para Vazão Variável . . . . .	44
5.3	Teste de Crescimento de Pressão . . . . .	45
5.3.1	Formulação Matemática . . . . .	46
5.3.2	Validação . . . . .	47
5.4	Teste de Contra-Pressão . . . . .	48
5.4.1	Formulação Matemática . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>

---

<b>A</b>	<b>Funções de Green em Problemas de Escoamento de Fluidos em Meios Porosos</b>	<b>57</b>
A.1	Identidade de Lagrange e Fórmula de Green . . . . .	57
<b>B</b>	<b>Aspectos Computacionais</b>	<b>67</b>
B.1	Características . . . . .	67
B.2	Instalação . . . . .	69
B.2.1	Instalação do CUBA . . . . .	69
B.2.2	Instalação do Cygwin . . . . .	69
B.2.3	Observações Finais . . . . .	70
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>

# Lista de Figuras

4.1	Radial Infinito - Geometria . . . . .	16
4.2	Propriedades Físicas do Gás ( $\mu$ e $Z$ ) . . . . .	19
4.3	Comportamento da Pseudo Pressão . . . . .	20
4.4	Comportamento do Desvio da Difusividade Hidráulica Adimensional . . . . .	20
4.5	Pseudo Pressão Adimensional e Derivada - Radial Infinito . . . . .	21
4.6	Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Radial Infinito . . . . .	22
4.7	Comparação do Comportamento da Solução Proposta Nesse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Radial Infinito . . . . .	22
4.8	Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Radial Infinito . . . . .	23
4.9	Solução Proposta Nesse Trabalho em Coordenadas Cilíndricas e Cartesianas - Radial Infinito . . . . .	24
4.10	Comparação entre a Solução Proposta Nesse Trabalho e por Diferenças Finitas - Coordenadas Cartesianas . . . . .	24
4.11	Falha Selante - Geometria . . . . .	25
4.12	Resultados Comparativos para o Modelo de Falha Selante . . . . .	28
4.13	Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Comparação entre Esse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Falha Selante . . . . .	29
4.14	Solução do Problema da Falha Selante . . . . .	29
4.15	Ampliação da Região de Longos Tempos da Solução do Problema da Falha Selante . . . . .	30
4.16	Comportamento Típico de Poço Próximo a Uma Falha Selante . . . . .	30
4.17	Falha Selante - Gráfico Diagnóstico - Regimes de Fluxo . . . . .	31
4.18	Falha Selante - Gráfico Especializado - Determinação da Permeabilidade e da Distância à Falha . . . . .	31
4.19	Fratura de Extensão Infinita - Geometria . . . . .	32
4.20	Comparação da Pressão e Derivada Logarítmica entre Esse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Fratura de Extensão Infinita . . . . .	35
4.21	Termo Não-Linear de Primeira Ordem - Fratura de Extensão Infinita . . . . .	35
4.22	Fratura Hidráulica - Geometria . . . . .	36
4.23	Pseudo Pressão Adimensional e Derivada - Fratura Hidráulica . . . . .	39
4.24	Termo Não-Linear de Primeira Ordem - Fratura Hidráulica . . . . .	39

---

5.1	Esquema de um Teste de Crescimento de Pressão . . . . .	46
5.2	Teste de Crescimento de Pressão - Período de Fluxo . . . . .	49
5.3	Teste de Crescimento de Pressão - Período de Fluxo . . . . .	49
5.4	Teste de Crescimento de Pressão - Período de Estática . . . . .	50
5.5	Teste de Crescimento de Pressão - Período de Estática . . . . .	50
5.6	Teste de Crescimento de Pressão - Gráfico de Horner . . . . .	51
5.7	Teste de Crescimento de Pressão - Fluxo e Estática . . . . .	51
5.8	Esquema de um Teste de Contra-Pressão . . . . .	52
A.1	Determinação da Função de Green - Poço Próximo à Falha Selante . . . . .	65



# Lista de Tabelas

4.1	Radial Infinito - Propriedades de Rocha e Fluido . . . . .	21
4.2	Falha Selante - Propriedades de Rocha e Fluido . . . . .	28
4.3	Falha Selante - Resultados Interpretados . . . . .	32
4.4	Fratura de Extensão Infinita - Propriedades de Rocha e Fluido . . . . .	34
4.5	Fratura Hidráulica - Propriedades de Rocha e Fluido . . . . .	38
5.1	Teste de Crescimento de Pressão - Propriedades de Rocha e Fluido . . . . .	48

## Simbologia

### Alfabeto Latino

$c_f$	Compressibilidade da Formação, $(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_g$	Compressibilidade do Gás, $(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_t$	Compressibilidade Total, $(kgf/cm^2)^{-1}$
$G_D$	Função de Green Adimensional
$h$	Espessura, $m$
$k$	Permeabilidade Absoluta, $mD$
$l_c$	Dimensão Característica
$M$	Massa Molecular do Gás
$m(p)$	Pseudo Pressão, $(kgf/cm^2)^2 / cp$
$m_D$	Pseudo Pressão Adimensional
$m_{DC}$	Solução da Pseudo Pressão Adimensional para Vazão Constante
$m_{DV}$	Solução da Pseudo Pressão Adimensional para Vazão Variável
$p$	Pressão, $kgf/cm^2$
$p_i$	Pressão Inicial, $kgf/cm^2$
$p_{sc}$	Pressão nas Condições-Padrão, $kgf/cm^2$
$p_{wf}$	Pressão de Fundo de Poço, $kgf/cm^2$
$p_D$	Pressão Adimensional
$p_{DC}$	Solução da Pressão Adimensional para Vazão Constante
$p_{DV}$	Solução da Pressão Adimensional para Vazão Variável
$q_g$	Vazão de Gás, $m^3/day$
$R$	Constante Universal dos Gases, 0,08478, $((kgf/cm^2) \cdot m^3) / ((mol - kg) \cdot K)$
$r$	Raio, $m$
$r_w$	Raio do Poço, $m$
$r_D$	Raio Adimensional

$T_{sc}$	Temperatura nas Condições-Padrão, °C
$T_{wf}$	Temperatura Próxima aos Canhoneados, °C
$x, y, z$	Coordenadas Cartesianas, $m$
$x_D, y_D, z_D$	Coordenadas Cartesianas Adimensionais
$w$	Fator de Desvio da Difusividade Adimensional
$Z$	Fator de Compressibilidade do Gás

### Alfabeto Grego

$\phi$	Porosidade
$\eta$	Difusividade Hidráulica, $mD / (kgf/cm^2)^{-1} \cdot cp$
$\eta_D$	Difusividade Hidráulica Adimensional
$\mu$	Viscosidade do Gás, $cp$
$\rho$	Massa Específica do Gás, $kg/m^3$

### Abreviaturas e Acrônimos

AOF	Absolute Open Flow
CCE	Condição de Contorno Externa
CCI	Condição de Contorno Interna
CI	Condição Inicial
EDH	Equação da Difusividade Hidráulica
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FG	Funções de Green
TL	Transformada de Laplace

[coloque aqui uma pequena biografia do autor]

*“Solução Geral para o Fluxo de Gás em um Meio Poroso”***Resumo**

O estudo do fluxo de gases reais em um meio poroso utiliza como modelo fundamental a equação da difusividade hidráulica não-linear. A maior parte dos trabalhos teóricos publicados até os dias de hoje para a obtenção de soluções aproximadas dessa equação utiliza a função pseudo-pressão em substituição à pressão. Essa transformação, no entanto, não leva em conta a variação do coeficiente de difusividade hidráulica com a pressão. Normalmente esse termo difusivo é considerado constante e as soluções clássicas para escoamento de líquidos são aplicadas. Métodos perturbativos foram utilizados para resolver essa classe de problema não-linear em uma geometria infinita em coordenadas cilíndricas, porém essa técnica só pode ser empregada em problemas auto-similares. Nesse trabalho uma nova solução geral, baseada em métodos perturbativos que apropriadamente levam em conta todas as não-linearidades da equação é proposta. Essa solução permite obter expressões analíticas para diferentes geometrias de fluxo. São apresentados resultados obtidos para cinco diferentes sistemas poço/reservatório: radial infinito, poço próximo a uma falha selante, fratura de extensão infinita, fratura hidráulica e testes de crescimento de pressão. Esses resultados são comparados a simulação por diferenças finitas com excelentes resultados.

**Palavras chave:** Equação da Difusividade, Testes em Poços de Gás, Engenharia de Reservatórios de Gás, Método da Perturbação, Funções de Green

*“Solução Geral para o Fluxo de Gás em um Meio Poroso”***Abstract**

The real gas flow in porous media uses as fundamental theoretical model the nonlinear gas diffusivity equation. The most of papers published up to now uses the pseudo pressure function instead of pressure to obtain approximate solutions for this equation. This transformation, however, does not take into account the variation of the hydraulic diffusivity coefficient with pressure. Normally this factor is considered constant and the classical solutions for liquid flow are applied. Perturbation methods were used to solve this class of nonlinear problem in an infinite geometry in cylindrical coordinates, but this technique can only be applied to self-similar problems. In this work a new general solution based on perturbative methods that properly takes into account all the nonlinearities of the equation is proposed. This solution allows to obtain analytical expressions for different flow geometries and results are presented for five different case studies: radial infinite acting, well near a sealing fault, fracture of infinite extension, hydraulic fractures and buildup tests. These results are compared to finite difference simulation with an excellent agreement.

**Keywords:** Diffusivity Equation, Gas Well Testing, Gas Reservoir Engineering, Perturbation Method, Green's Functions.

# Chapter 1

## Introdução

Recentemente, o gás natural tem aumentado sua participação na matriz energética brasileira, especialmente por ser uma fonte de energia menos poluente que o petróleo. É possível encontrar gás natural de duas formas: associado à produção de petróleo (denominado gás associado) e não associado, ou seja, uma jazida portadora exclusivamente de gás em condições de pressão e temperatura de reservatório.

O desenvolvimento de qualquer jazida de hidrocarbonetos depende da obtenção periódica de dados confiáveis que permitam validar, atualizar e mesmo corrigir modelos numéricos que são adotados como ferramenta de auxílio no gerenciamento de um determinado reservatório. Uma das principais ferramentas para a coleta dessas informações são os testes de pressão em poços, que permitem conhecer parâmetros de reservatórios (permeabilidade e dano, por exemplo) e o nível de pressão estática, ou pressão média, do campo, ou, mais especificamente, da área de drenagem em torno do poço. De posse destas informações, é possível também analisar a potencialidade de uma formação, estimar as reservas disponíveis de hidrocarbonetos e prever a produção dos fluidos existentes nos reservatórios. Por fim, na descoberta de novos campos, as decisões sobre investimento de curto e médio prazos e o esquema de exploração dependem, fundamentalmente, dos resultados da interpretação de testes em poços pioneiros.

Modelos analíticos e numéricos são utilizados para representar matematicamente o escoamento de fluidos em meios porosos. O domínio da teoria de fluxo de fluidos em meios porosos é imprescindível para o desenvolvimento desses modelos. Soluções analíticas para o escoamento de fluidos pouco compressíveis em reservatórios são consagradas na engenharia de petróleo. Modelos que levam em conta diferentes arranjos do conjunto poço/reservatório ou a presença de feições geológicas dentro do meio poroso, tais como falhas, *pinchouts*, etc., já possuem soluções conhecidas. No caso do escoamento de gás, no entanto, poucos modelos analíticos, na maioria dos casos aplicados a geometrias simplificadas, foram desenvolvidos em função da característica não-linear do problema. De uma forma geral buscam-se aproximações que levam a equação da difusividade do gás a uma forma similar à equação para fluidos pouco compressíveis. Essa simplificação faz com que as mesmas técnicas de solução para ambas equações possam ser aplicadas. No entanto, o problema de escoamento de gás é eminentemente não-linear por causa da dependência das propriedades do fluido (viscosidade e compressibilidade, por exemplo) em

relação à pressão. Assim os modelos analíticos existentes até os dias de hoje são falhos na previsão do comportamento de reservatórios de gás.

Nas últimas décadas, com o crescimento da capacidade de processamento dos computadores e de sua utilização em larga escala, métodos numéricos mais sofisticados têm ganho importância na solução desse problema. Essa abordagem numérica, entretanto, por muitas vezes mascara o comportamento do fluxo de gás em um reservatório fazendo com que a busca por modelos analíticos mais precisos torne-se indispensável.

Nesse trabalho será apresentada uma nova solução analítica, precisa e geral, da equação não-linear que representa o escoamento do gás em um meio poroso, aplicada a diferentes sistemas de poço/reservatório e para problemas de vazão constante e variável. A técnica utilizada de expansão assintótica associada a funções de Green lineariza a equação em todos os seus termos.

O texto se organiza da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica onde são discutidas as principais tentativas de resolver esse problema e também o uso de funções de Green e do método da perturbação. A solução em sua forma generalizada, bem como as hipóteses simplificadoras, é apresentada no Capítulo 3. Soluções particulares para vazão constante dos modelos mais comumente utilizados na indústria serão desenvolvidas no Capítulo 4. No Capítulo 5 será apresentada a formulação e a solução para o mesmo problema para vazão variável. Finalmente, no Capítulo 6, temos as conclusões e possíveis aplicações desta técnica de solução em outros problemas.



# Chapter 2

## Revisão Bibliográfica

O escoamento de fluidos em meios porosos é modelado matematicamente pela equação da difusividade hidráulica. No estudo do fluxo de fluidos pouco compressíveis essa equação é considerada linear e técnicas consagradas de solução de equações diferenciais podem ser utilizadas para resolvê-la. No entanto, no caso de gases as propriedades físicas do fluido são dependentes da pressão o que torna a equação não-linear. A literatura de escoamento de gases em meios porosos mostra algumas tentativas de obtenção de soluções exatas que tratassem essa não-linearidade analiticamente. Em outros casos, esquemas numéricos são aplicados.

As soluções para a equação da difusividade do gás já foram formuladas em termos da pressão ( $p$ ) ou do quadrado da pressão ( $p^2$ ) ([1, 2, 3, 4]). Outro caso considera o efeito de estocagem e o dano, mecânico e pelo efeito das altas velocidades em torno do poço [5]. No entanto, esses modelos não resolvem adequadamente as variações das propriedades dos fluidos quando ocorrem acentuados gradientes de pressão durante o período em que o reservatório é colocado em produção. O produto viscosidade-compressibilidade depende da pressão e assim, o problema continua não-linear. O estudo dessas variações e o impacto das mesmas na solução da equação da difusividade não-linear é um dos focos principais deste trabalho.

Em uma tentativa de linearização da equação da difusividade hidráulica é proposta a função pseudo-pressão em substituição à pressão como variável independente [6]. Com essa definição, a equação da difusividade para o gás toma a forma da equação para fluidos pouco compressíveis e os termos quadráticos dos gradientes de pressão, que normalmente são desprezados nas soluções para fluidos pouco compressíveis, são devidamente tratados. No entanto, o uso da função pseudo-pressão não lineariza completamente a equação. A não-linearidade persiste no termo relativo à difusividade hidráulica. Trabalhos posteriores consideraram que a variação da difusividade hidráulica seria muito pequena podendo ser considerada constante. Com isso, as técnicas de solução para líquidos, bem como as de interpretação de testes de formação poderiam ser aplicadas ao escoamento de gás [7]. Como veremos ao longo desse trabalho essas variações podem ser consideráveis e assim essa hipótese está comprometida. A generalização do problema do escoamento de um fluido compressível em um meio poroso incluindo efeitos inerciais foi feita utilizando-se a equação de Forchheimer [8].

De forma similar à pseudo-pressão, é proposto o pseudo-tempo [9], definido de forma empírica

e aplicado durante o processo de interpretação de dados de um teste de gás. Posteriormente tenta-se estabelecer uma base matemática para o pseudo-tempo [10], porém é mostrado que algumas deduções presentes na sua definição estão erradas [11]. Uma análise crítica do uso do pseudo-tempo no período de *drawdown* e no de *buildup*, mostra que a função pseudo tempo não funciona corretamente para períodos transientes de fluxo.

Embora a pseudo-pressão seja utilizada para eliminar a não-linearidade, o termo relativo à derivada temporal da equação continua não-linear por causa da difusividade. É proposta, então, uma mudança no tempo de *buildup* para que a solução se torne mais precisa [12]. São feitas análises por meio de simulação numérica da solução da queda de pressão de um teste de gás comparada à de um teste de líquido. Esse trabalho mostra que o uso deste tempo pode levar a erros da ordem de 7% na estimativa da capacidade fluxo *kh*. Demonstra-se que para tempos longos de fechamento a solução de gás converge para a solução de líquido e que para baixas vazões o efeito da não-linearidade é negligenciável.

Métodos perturbativos também foram usados na tentativa de resolver aproximadamente a equação da difusividade do gás para o regime de fluxo radial infinito. A solução baseia-se na expansão em série infinita dos termos não-lineares. Embora tenham sido feitas certas simplificações desnecessárias, as conclusões sobre o comportamento da solução são corretas [13, 14].

Foi proposta também uma metodologia de solução da equação diferencial não-linear do gás por transformada de Laplace [15]. O produto  $\eta_D \frac{\partial m_D}{\partial t_D}$  é interpretado como uma integral de convolução da forma  $\int_0^{t_D} \frac{\partial m_D}{\partial \tau} g(t_D - \tau) d\tau$  onde a função  $g$  é determinada pela igualdade das duas expressões. Nessa abordagem, a difusividade adimensional é considerada função unicamente do tempo e não é garantido que uma única função  $g$  exista para todo o domínio. Embora sujeita a críticas, essa solução apresenta resultados muito bons comparados à simulação por diferenças finitas para o caso de um poço vertical em um reservatório cilíndrico selado.

A solução analítica do escoamento de gás em um meio poroso radial infinito homogêneo isotrópico foi obtida por meio da transformada de Boltzmann [16, 17]. Uma solução perturbativa para o mesmo problema foi desenvolvida, mostrando que essa solução é uma expansão em série infinita da equação por Boltzmann. Além disso, demonstra-se que para aplicações práticas de engenharia, a solução pode ser truncada no termo não-linear de segunda ordem. Infelizmente essa abordagem somente pode ser aplicada a problemas auto-similares e assim, para outros casos de interesse prático da engenharia de reservatórios, ela não pode ser utilizada.

Um outro aspecto que deve ser considerado é o da solução da equação da difusividade do gás para vazão variável. No caso de fluidos pouco compressíveis a solução é dada pelo princípio de Duhamel, largamente aplicado em problemas de testes de poços [18]. Para fluidos compressíveis como o gás esse princípio não pode ser aplicado dada sua natureza fundamental, que é a de uma superposição no tempo, a qual não pode ser aplicada a um problema não-linear. Simplificando-se o princípio de Duhamel, considerando que para tempos suficientemente longos o crescimento de pressão é dependente da última vazão de fluxo [19]. Essa hipótese faz com que a solução se reduza à bem conhecida solução da linha-fonte para um teste de crescimento de pressão em um

poço produzindo um fluido levemente compressível em um reservatório infinito.

Posteriormente foi considerado que a teoria da superposição pode ser aplicada em casos não-lineares como testes em poços de gás [20, 21]. À partir daí faz-se uso das técnicas de interpretação de testes para líquidos. Recentemente foi investigado o princípio da superposição em problemas não-lineares [22]. Entretanto, o problema foi simplificado, tratando o termo da difusividade hidráulica como uma constante. Com isso, a equação da difusividade do gás toma a forma da do líquido e as técnicas de solução, de superposição e as de interpretação de testes relativas a fluidos de pequena compressibilidade podem ser aplicadas.

Diferentes métodos de obtenção da solução do problema de escoamento de líquidos em um sistema radial infinito foram compilados, incluindo o uso de funções de Green [23]. Embora seja uma técnica antiga de solução de equações diferenciais, funções de Green não são usualmente utilizadas porque nem sempre é fácil determinar a função apropriada para cada problema ou geometria. Além disso, o comportamento de pressões em um reservatório sujeito à produção por um poço com uma fratura hidráulica vertical de condutividade infinita também pode ser obtido por funções de Green [24], bem como outras soluções com diferentes geometrias de poço [25, 26]. Nas últimas décadas, as funções de Green foram utilizadas para resolver uma ampla gama de problemas de fluxo de fluidos de pequena compressibilidade [27].



# Chapter 3

## Modelo Matemático

Nesse capítulo será apresentada a formulação geral do problema do escoamento de gás em um meio poroso através da equação da difusividade. Serão apresentadas também uma solução geral para esse problema e uma solução aproximada baseada em expansão em série infinita acoplada a funções de Green. A dedução da solução será feita a partir da equação da continuidade para um fluido de alta compressibilidade com um termo-fonte em uma geometria cartesiana tridimensional. As expressões obtidas são gerais e serão utilizadas para resolver problemas com diferentes condições de contorno (sistemas poço/reservatório) nos capítulos seguintes.

### 3.1 Formulação do Problema

Para formular o problema do escoamento de gás em um meio poroso em coordenadas cartesianas 3-D, será utilizada a equação da conservação de massa, dada por

$$\nabla \cdot (\rho v) - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) = -\rho \tilde{q}(x, y, z, t). \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $v$  é a velocidade do fluido  $\phi$  é a porosidade e  $\tilde{q}$  representa a retirada unitária de massa. A equação está em um sistema de unidades consistente. Serão adotadas as seguintes hipóteses:

- meio poroso homogêneo e isotrópico de espessura constante;
- meio poroso saturado unicamente com gás de composição constante;
- fluxo isotérmico;
- permeabilidade absoluta e porosidade da pressão;
- desprezados efeitos inerciais e gravitacionais.

Considerando as hipóteses simplificadoras citadas e aplicando a lei de Darcy, dada por

$$v = -\frac{k}{\mu(p)} \nabla p \quad (3.2)$$

na equação 3.1, temos

$$\nabla \cdot \left( \rho \frac{k}{\mu(p)} \nabla p \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) = -\rho \tilde{q}(x, y, z, t). \quad (3.3)$$

Utilizando a equação de estado para gases reais,

$$\rho = \frac{pM}{Z(p)RT}, \quad (3.4)$$

as definições de compressibilidade do gás e da formação,

$$c_g = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}, \quad (3.5)$$

$$c_r = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp}, \quad (3.6)$$

e substituindo 3.4 a 3.6 em 3.3, obtemos após simplificações a seguinte expressão

$$\nabla \cdot \left( \frac{p}{\mu(p)Z(p)} \nabla p \right) - \frac{\mu(p)\phi c_g}{k} \frac{p}{\mu(p)Z(p)} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p}{kZ(p)} \tilde{q}(x, y, z, t). \quad (3.7)$$

Para resolver esse problema, será adotada a seguinte condição inicial e domínio infinito

$$p(x, y, z, t = 0) = p_i, \quad (3.8)$$

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \pm\infty} p(x, y, z, t) = p_i. \quad (3.9)$$

Utilizando a definição da função pseudo pressão [6],

$$m(p) = 2 \int_{p_B}^p \frac{p'}{\mu(p')Z(p')} dp', \quad (3.10)$$

denominando

$$\Delta m(p) = m(p_i) - m(p) = 2 \int_{p_B}^{p_i} \frac{p'}{\mu(p')Z(p')} dp' - 2 \int_{p_B}^p \frac{p'}{\mu(p')Z(p')} dp' = 2 \int_p^{p_i} \frac{p'}{\mu(p')Z(p')} dp', \quad (3.11)$$

e substituindo a equação 3.11 no problema 3.7-3.9,

$$\nabla^2 (\Delta m(p)) - \frac{1}{\eta(p)} \frac{\partial \Delta m(p)}{\partial t} = -\frac{2p}{kZ(p)} \tilde{q}(x, y, z, t), \quad (3.12)$$

$$\Delta m(p)(x, y, z, t = 0) = 0, \quad (3.13)$$

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \pm\infty} \Delta m(p)(x, y, z, t) = 0. \quad (3.14)$$

O termo-fonte definido por  $\frac{2p}{kZ(p)}\tilde{q}(x, y, z, t)$  deve ser tratado separadamente. Admitindo a hipótese de que a vazão mássica no reservatório é igual a vazão mássica na superfície em condições-padrão,

$$\rho\tilde{q}(x, y, z, t) = (\rho\tilde{q}(x, y, z, t))_{sup,sc} \quad (3.15)$$

$$\rho\tilde{q}(x, y, z, t) = \rho_{sup,sc}\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t) \quad (3.16)$$

$$\frac{pM}{Z(p)RT}\tilde{q}(x, y, z, t) = \frac{p_{sc}M}{RT_{sc}}\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t) \quad (3.17)$$

$$\frac{p}{Z(p)}\tilde{q}(x, y, z, t) = \frac{p_{sc}T}{T_{sc}}\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t) \quad (3.18)$$

e substituindo a equação 3.18 em 3.12,

$$\nabla^2(\Delta m(p)) - \frac{1}{\eta(p)}\frac{\partial\Delta m(p)}{\partial t} = -\frac{2p_{sc}T}{kT_{sc}}\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t). \quad (3.19)$$

$$\Delta m(p)(x, y, z, t = 0) = 0, \quad (3.20)$$

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \pm\infty} \Delta m(p)(x, y, z, t) = 0. \quad (3.21)$$

Para uma definição apropriada da pseudo pressão adimensional, vamos determinar uma dimensão característica  $l_c$ . A vazão de produção na condição-padrão é dada por

$$q_{sc} = \frac{kA}{\mu}\nabla p, \quad (3.22)$$

e a área exposta ao fluxo  $A$  pode ser expressa por

$$A = l_ch. \quad (3.23)$$

Assim,

$$q = \frac{kl_ch}{\mu}\nabla p, \quad (3.24)$$

$$q_{sc} = q\frac{pT_{sc}}{Z(p)p_{sc}T}, \quad (3.25)$$

$$q_{sc} = kl_ch\frac{T_{sc}}{p_{sc}T}\frac{p}{\mu(p)Z(p)}\nabla p. \quad (3.26)$$

A partir da definição da pseudo pressão (equação 3.10),

$$q_{sc} = kl_ch\frac{T_{sc}}{p_{sc}T}\nabla m(p), \quad (3.27)$$

$$q_{sc} = -kl_ch\frac{T_{sc}}{p_{sc}T}\nabla(\Delta m(p)). \quad (3.28)$$

Desta forma, a pseudo pressão adimensional fica expressa por:

$$m_D = \frac{kh}{q_{sc} p_{sc} T} \frac{T_{sc}}{p_{sc}} \Delta m(p). \quad (3.29)$$

Definindo as seguintes variáveis dimensionais

$$t_D = \frac{kt}{\phi(\mu c_t)_i l_c^2} = \eta_i \frac{t}{l_c^2}, \quad (3.30)$$

$$x_D = \frac{x}{l_c}, \quad y_D = \frac{y}{l_c}, \quad z_D = \frac{z}{l_c}, \quad (3.31)$$

e substituindo as equações 3.29-3.31 na equação 3.19, temos

$$\nabla^2 m_D - \frac{\eta_i}{\eta(p)} \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = -2 \frac{\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t) l_c^2 h p_{sc} T}{q_{sc} k T_{sc} p_{sc} T}. \quad (3.32)$$

Fazendo

$$f(x_D, y_D, z_D, t_D) = -2 \frac{\tilde{q}_{sup,sc}(x, y, z, t) l_c^2 h}{q_{sc}}, \quad (3.33)$$

a equação da difusividade adimensional pode ser escrita como:

$$\nabla^2 m_D - \eta_D \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(x_D, y_D, z_D, t_D). \quad (3.34)$$

onde  $\eta_D$  é a difusividade adimensional que representa o desvio em relação à condição inicial, do produto viscosidade-compressibilidade, definido por:

$$\eta_D = \frac{\mu c_t}{(\mu c_t)_i}. \quad (3.35)$$

Considerando a pressão inicial do reservatório homogênea em um domínio infinito, a condição inicial e a condição de contorno externa são dadas por

$$m_D(x_D, y_D, z_D, t_D = 0) = 0, \quad (3.36)$$

$$\lim_{x_D, y_D, z_D \rightarrow \pm\infty} m_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0, \quad (3.37)$$

em variáveis dimensionais. Definindo o fator de desvio da difusividade adimensional através de

$$w = \frac{\mu c_t - (\mu c_t)_i}{(\mu c_t)_i}, \quad (3.38)$$

então

$$\eta_D = w + 1 \quad (3.39)$$

e

$$\nabla^2 m_D - \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(x_D, y_D, z_D, t_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \quad (3.40)$$



É importante destacar que, embora a equação 3.40 continue não linear, em função do produto  $w \frac{\partial m_D}{\partial t_D}$ , as funções  $w$  e  $\frac{\partial m_D}{\partial t_D}$  são suaves e possuem primeira derivada contínua. Isso implica que a abordagem por funções de Green pode ser utilizada para resolver esse problema. Considerando  $f(x_D, y_D, z_D, t_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D}$  o termo-fonte da equação 3.40 a solução baseada em funções de Green é dada por

$$m_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_D \int_0^{t_D} \left[ f(x'_D, y'_D, z'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \right] \times \\ \times G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D dz'_D \quad (3.41)$$

A equação 3.41 é a solução do problema 3.34 com condições inicial e de contorno 3.36 e 3.37. Note que essa equação representa uma solução implícita e o procedimento para resolvê-la deve ser iterativo. Aplicando-se um algoritmo de iteração funcional, como por exemplo o método de Picard, a solução pode ser calculada por meio do seguinte procedimento:

$$m_D^k(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_D \int_0^{t_D} \left[ f(x'_D, y'_D, z'_D, t'_D) + w(m_D^{k-1}) \frac{\partial m_D^{k-1}}{\partial t_D} \right] \times \\ \times G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D dz'_D \quad (3.42)$$

Entretanto, o cálculo de quatro integrais (três dimensões espaciais mais a dimensão temporal) iterativamente pode ser computacionalmente proibitivo. Por essa razão será utilizado um método baseado em expansão assintótica para o cálculo de uma solução aproximada.

## 3.2 Método de Expansão Assintótica

Para resolver o problema 3.34 com condições inicial e de contorno externa 3.36 e 3.37 utiliza-se uma expansão em série infinita da forma

$$m_D = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k m_D^{(k)}, \quad (3.43)$$

onde  $\varepsilon$  é o termo de perturbação da série limitado entre 0 e 1. Assim, aplicando  $\varepsilon$  ao fator de desvio da difusividade adimensional  $w$ , na equação 3.40,

$$\nabla^2 m_D - (1 + \varepsilon w) \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(x_D, y_D, z_D, t_D). \quad (3.44)$$

Considerando

$$\varepsilon = 0 \quad \text{problema linear associado}, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon = 1 \quad \text{problema não-linear}, \quad (3.46)$$

a série infinita tem a seguinte forma

$$m_D = m_D^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k m_D^{(k)} \quad (3.47)$$

onde  $m_D^{(0)}$  é a solução do problema linear associado (solução para líquidos). Substituindo 3.47 em 3.44 chegamos à seguinte expressão, após agrupar os termos em  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 m_D^{(0)} - \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t_D} - f(x_D, y_D, z_D, t_D) \right] + \\ & \varepsilon^1 \left[ \nabla^2 m_D^{(1)} - \frac{\partial m_D^{(1)}}{\partial t_D} - w \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t_D} \right] + \\ & \varepsilon^2 \left[ \nabla^2 m_D^{(2)} - \frac{\partial m_D^{(2)}}{\partial t_D} - w \frac{\partial m_D^{(1)}}{\partial t_D} \right] + \dots = 0 \quad (3.48) \end{aligned}$$

O procedimento para resolver a equação 3.48 é recursivo, ou seja, para resolver a parcela relativa ao termo de ordem 1 de  $\varepsilon$  é necessário resolver o de ordem 0. Isso implica que o valor do fator de desvio da difusividade adimensional  $w$  depende da solução de  $m_D$  nas ordens anteriores de  $\varepsilon$ . Por exemplo o fator  $w$  para  $m_D^{(1)}$  é função de  $m_D^{(0)}$ . O fator  $w$  de  $m_D^{(2)}$  depende de  $(m_D^{(0)} + m_D^{(1)})$ . Assim o fator  $w$  de cada parcela da ordem  $\varepsilon$  pode ser expresso por:

$$w = w \left( \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i m_D^{(i)} \right). \quad (3.49)$$

Como consequência, a equação 3.48 pode ser separada em  $n$  problemas por suas respectivas ordens de  $\varepsilon$ :

ORDEM 0:

$$\nabla^2 m_D^{(0)} - \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t_D} - f(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0, \quad (3.50)$$

$$m_D^{(0)}(x_D, y_D, z_D, t_D = 0) = 0, \quad (3.51)$$

$$\lim_{x_D, y_D, z_D \rightarrow \pm\infty} m_D^{(0)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0, \quad (3.52)$$

ORDEM 1:

$$\varepsilon^1 \left( \nabla^2 m_D^{(1)} - \frac{\partial m_D^{(1)}}{\partial t_D} - w \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t_D} \right) = 0, \quad (3.53)$$

$$\varepsilon^1 m_D^{(1)}(x_D, y_D, z_D, t_D = 0) = 0, \quad (3.54)$$

$$\lim_{x_D, y_D, z_D \rightarrow \pm\infty} \varepsilon^1 m_D^{(1)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0, \quad (3.55)$$

ORDEM 2:

$$\varepsilon^2 \left( \nabla^2 m_D^{(2)} - \frac{\partial m_D^{(2)}}{\partial t_D} - w \frac{\partial m_D^{(1)}}{\partial t_D} \right) = 0, \quad (3.56)$$

$$\varepsilon^2 m_D^{(2)}(x_D, y_D, z_D, t_D = 0) = 0, \quad (3.57)$$

$$\lim_{x_D, y_D, z_D \rightarrow \pm\infty} \varepsilon^2 m_D^{(2)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0, \quad (3.58)$$

⋮

ORDEM  $k$ :

$$\varepsilon^k \left( \nabla^2 m_D^{(k)} - \frac{\partial m_D^{(k)}}{\partial t_D} - w \frac{\partial m_D^{(k-1)}}{\partial t_D} \right) = 0, \quad (3.59)$$

$$\varepsilon^k m_D^{(k)}(x_D, y_D, z_D, t_D = 0) = 0, \quad (3.60)$$

$$\lim_{x_D, y_D, z_D \rightarrow \pm\infty} \varepsilon^k m_D^{(k)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = 0. \quad (3.61)$$

A solução do problema de ordem 0 é:

$$m_D^{(0)} = \int_D \int_0^{t_D} f(x'_D, y'_D, z'_D, t'_D) G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D, \quad (3.62)$$

onde  $G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D)$  é a função de Green para a respectiva geometria. As soluções de mais alta ordem (1, 2, ...,  $k$ ) são obtidas pela utilização da mesma função de Green  $G_D$  do problema linear associado (ou problema de ordem 0) com o termo fonte igual a  $w^{(k-1)} \frac{\partial m_D^{(k-1)}}{\partial t_D}$ ,

$$m_D^{(1)} = \int_D \int_0^{t_D} w(m_D^{(0)}) \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t'_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D, \quad (3.63)$$

$$m_D^{(2)} = \int_D \int_0^{t_D} w(m_D^{(0)} + m_D^{(1)}) \frac{\partial m_D^{(1)}}{\partial t'_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D, \quad (3.64)$$

⋮

$$m_D^{(k)} = \int_D \int_0^{t_D} w \left( \sum_{j=0}^{k-1} m_D^{(j)} \right) \frac{\partial m_D^{(k-1)}}{\partial t'_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D. \quad (3.65)$$

Substituindo as equações 3.62 e 3.63 a 3.65 em 3.47:

$$m_D = m_D^{(0)} + \sum_{i=1}^k m_D^{(i)} = \int_D \int_0^{t_D} \left\{ f(x'_D, y'_D, z'_D, t'_D) + \sum_{i=1}^k \left[ w \left( \sum_{j=0}^{i-1} m_D^{(j)} \right) \frac{\partial m_D^{(i-1)}}{\partial t'_D} \right] \right\} \times \\ \times G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D dz'_D. \quad (3.66)$$

A equação 3.66 é a solução por expansão assintótica do problema 3.34 com condições inicial e

de contorno 3.36 e 3.37. Algumas observações sobre a solução :

- A condição de contorno interna, representada nessa formulação pelo termo fonte  $f(x_D, y_D, z_D, t_D)$ , deve ser especificada para cada caso e/ou geometria.
- Da mesma forma, a função de Green  $G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, z_D, z'_D, t_D, t'_D)$  deve ser especificada para cada caso e/ou geometria.
- Se compararmos as soluções obtidas pelas equações 3.42 e 3.66 vemos que as duas guardam alguma semelhança. No entanto, por construção, os algoritmos para determinação de cada uma das soluções são diferentes e assim, podemos notar que somente nos seguintes casos as soluções se equivalem: no caso do método de expansão assintótica, ao calcularmos o termo de ordem 1 somado ao termo de ordem 0, temos o mesmo resultado da primeira iteração do método de iteração funcional. A partir da expansão assintótica temos que:

$$m_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = m_D^{(0)}(x_D, y_D, z_D, t_D) + m_D^{(1)}(x_D, y_D, z_D, t_D) \quad (3.67)$$

onde

$$m_D^{(0)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} f(\dots) G_D(\dots) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D \quad (3.68)$$

$$m_D^{(1)}(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w(m_D^{(0)}) \frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t'_D} G_D(\dots) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D \quad (3.69)$$

E pelo método de iteração funcional,

$$m_D^1(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[ f(\dots) + w(m_D^0) \frac{\partial m_D^0}{\partial t'_D} \right] G_D(\dots) dt'_D dz'_D dy'_D dx'_D \quad (3.70)$$

- Para calcular o termo não linear de primeira ordem  $m_D^{(1)}$  utiliza-se o pacote de integração numérica multidimensional chamado *CUBA Library* [28, 29]. Como a solução é truncada no termo de primeira ordem, a derivada  $\frac{\partial m_D^{(0)}}{\partial t'_D}$  é conhecida analiticamente pois  $m_D^{(0)}$  é a solução linear do problema. Da mesma forma o fator de desvio da difusividade  $w$  é função da solução linear  $m_D^{(0)}$ .

# Chapter 4

## Soluções para Vazão Constante

Neste capítulo são apresentadas as soluções para vazão constante em quatro diferentes geometrias do conjunto poço/reservatório: radial infinito, poço próximo a uma falha selante, fratura de extensão infinita e fratura hidráulica de condutividade uniforme. Embora a solução por transformada de Boltzmann ([16, 17]) seja conhecida para o regime de fluxo radial infinito, ela será apresentada como uma forma de validação da nossa solução. Como as outras três geometrias de fluxo não possuem soluções analíticas, a validação será feita por comparação com simulação por diferenças finitas.

### 4.1 Radial Infinito

Nesse modelo serão consideradas as seguintes hipóteses (Figura 4.1):

- reservatório homogêneo isotrópico de extensão infinita;
- reservatório de espessura constante;
- poço no centro do reservatório penetrando totalmente a formação;
- fluxo isotérmico;
- composição do gás constante;
- desconsiderados efeitos não-Darcyianos;
- permeabilidade absoluta e porosidade são independentes da pressão.

#### 4.1.1 Formulação Matemática

O modelo é representado matematicamente pela equação diferencial parcial

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial m_D}{\partial r_D} \right) - \eta_D \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(r_D, t_D), \quad (4.1)$$

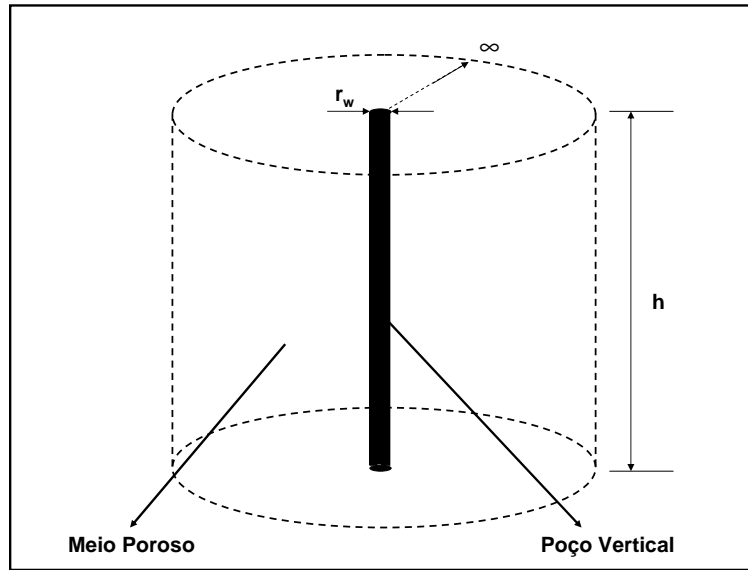


Figura 4.1: Radial Infinito - Geometria

a condições inicial

$$m_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (4.2)$$

e a condição de contorno externa

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_D(r_D, t_D) = 0, \quad (4.3)$$

e o termo-fonte  $f(r_D, t_D)$  representa uma vazão unitária adimensional. Nessa geometria a dimensão característica ( $l_c$ ) escolhida será o raio do poço  $r_w$ . Assim, o tempo adimensional é definido como

$$t_D = \frac{kt}{\phi(\mu c_t)_i r_w^2} = \eta_i \frac{t}{r_w^2}. \quad (4.4)$$

Como o poço atravessa completamente a espessura do reservatório, não há fluxo na direção vertical e assim podemos escrever a equação 3.41 em coordenadas cartesianas 2-D,

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[ f(x'_D, y'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \right] G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D, \quad (4.5)$$

e a função de Green para essa geometria é dada por [30, 31]

$$G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) = \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right). \quad (4.6)$$

Considerando as seguintes transformações

$$(x_D - x_{D_0})^2 + (y_D - y_{D_0})^2 = r_D^2 + r_{D_0}^2 - 2r_D r_{D_0} \cos(\theta - \theta') \quad (4.7)$$

e

$$dx_D dy_D = r_D dr_D d\theta, \quad (4.8)$$

a função de Green em coordenadas cilíndricas torna-se

$$G_D(r_D, r_{D_0}, \theta, \theta_0, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{4(t_D - t_{D_0})} \exp\left(-\frac{r_D^2 + r_{D_0}^2 - 2r_D r_{D_0} \cos(\theta - \theta_0)}{4(t_D - t_{D_0})}\right). \quad (4.9)$$

Substituindo 4.7, 4.8 e 4.9 em 4.5,

$$m_D(r_D, \theta, t_D) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{t_D} \left[ f(r'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t'_D} \right] \times \\ \times \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2 + r_D'^2 - 2r_D r'_D \cos(\theta - \theta')}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D r'_D dr'_D d\theta', \quad (4.10)$$

$$m_D(r_D, \theta, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} \left[ f(r'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t'_D} \right] \times \\ \times \frac{r'_D}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2 + r_D'^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D dr'_D \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r_D r'_D \cos(\theta - \theta')}{2(t_D - t'_D)}\right) d\theta'. \quad (4.11)$$

A integral sobre  $\theta$  pode ser substituída por [31, 32]

$$\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r_D r_{D_0} \cos(\theta - \theta')}{2(t_D - t_{D_0})}\right) d\theta' = \frac{2}{r_{D_0}} I_0\left(\frac{r_D r_{D_0}}{2(t_D - t_{D_0})}\right), \quad (4.12)$$

e a solução em coordenadas cilíndricas é dada por

$$m_D(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} \left[ f(r'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t'_D} \right] \times \\ \times \frac{1}{2(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2 + r_D'^2}{4(t_D - t'_D)}\right) I_0\left(\frac{r_D r'_D}{2(t_D - t'_D)}\right) dt'_D dr'_D, \quad (4.13)$$

ou

$$m_D(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} \left[ f(r'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t'_D} \right] G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (4.14)$$

onde  $G_D(r_D, r_{D_0}, t_D, t_{D_0})$  é a função de Green para geometria infinita em coordenadas cilíndricas

com uma fonte em  $r_{D_0}$  [30, 31]:

$$G_D(r_D, r_{D_0}, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{2(t_D - t_{D_0})} \exp\left(-\frac{(r_D - r_{D_0})^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right) I_0\left(\frac{r_D r_{D_0}}{2(t_D - t_{D_0})}\right), \quad (4.15)$$

e  $I_0$  é a função modificada de Bessel de primeira espécie e de ordem zero [32]. Definindo uma fonte em  $r_D = 0$  constante no tempo,

$$f(r_D, t_D) = f(r_D) = \delta(r_D - 0), \quad (4.16)$$

e substituindo 4.16 em 4.14,

$$m_D(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} \delta(r_D - 0) G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (4.17)$$

Aplicando a propriedade de amostragem da função  $\delta$  na equação 4.17, temos

$$m_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} G_D(r_D, 0, t_D, t'_D) dt'_D + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (4.18)$$

Além disso, tomando o limite  $r_{D_0} \rightarrow 0$  na equação 4.15,

$$G_D(r_D, 0, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{2(t_D - t_{D_0})} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right), \quad (4.19)$$

e substituindo 4.19 em 4.18, encontramos a seguinte expressão

$$m_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} \frac{1}{2(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (4.20)$$

A primeira parcela representa a solução para líquidos, ou seja,

$$\int_0^{t_D} \frac{1}{2(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D = p_D(r_D, t_D). \quad (4.21)$$

Substituindo 4.21 em 4.20, encontramos a solução do problema

$$m_D(r_D, t_D) = p_D(r_D, t_D) + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (4.22)$$



Para o modelo radial infinito  $p_D(r_D, t_D)$  é dada por

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} \mathbf{E}_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right), \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{E}_i(-x)$  é a função integral exponencial [32].

### 4.1.2 Validação

Para avaliar a solução encontrada, foram selecionados os dados constantes na Tabela 4.1. A Figura 4.2 mostra o comportamento das propriedades físicas do gás em função da pressão. A função pseudo pressão é construída para relacionar a solução adimensional  $m_D$  com a pressão de fluxo (Figura 4.3). O comportamento do desvio da difusividade hidráulica adimensional pode ser visto na figura 4.4.

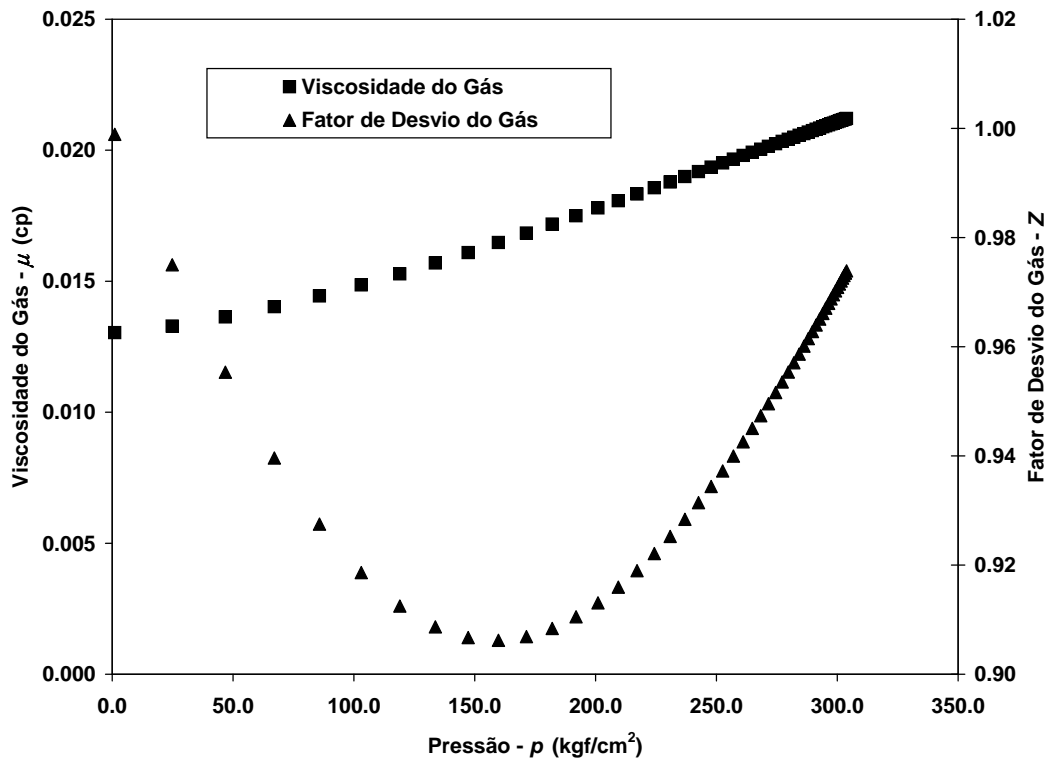


Figura 4.2: Propriedades Físicas do Gás ( $\mu$  e  $Z$ )

A solução aqui apresentada é comparada com a obtida por transformação auto-similar [16, 17] com excelentes resultados (Figura 4.5). A avaliação do termo não-linear de primeira ordem repetiu a concordância (Figura 4.6).

Para validar a solução proposta nesse trabalho foi construído um modelo numérico em um simulador de fluxo comercial. O modelo, em coordenadas cilíndricas, foi discretizado com 200 células ao longo de  $r$ , com espaçamento logarítmico na direção radial. Esse tipo de espaçamento se faz necessário para que erros de truncamento sejam minimizados. Na figura 4.7 são apresentados os resultados comparativos para a pseudo pressão adimensional  $m_D$  e a sua derivada  $m'_D$ , calculados pela solução geral obtida neste trabalho e por simulação por diferenças finitas. Os

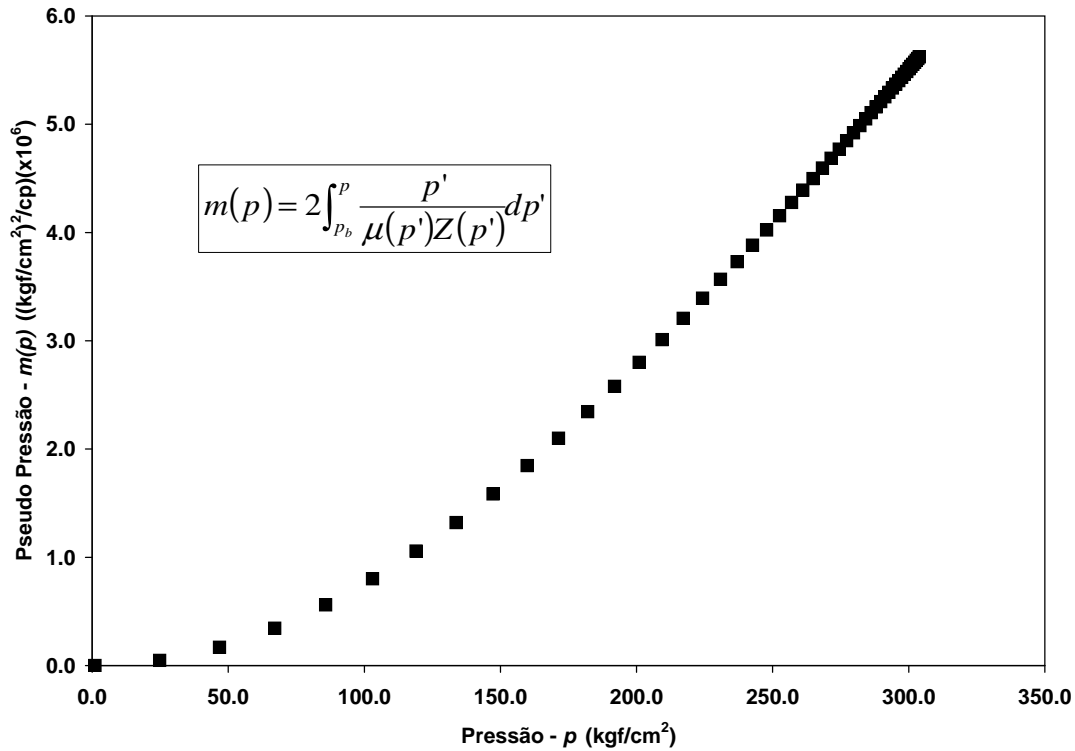


Figure 4.3: Comportamento da Pseudo Pressão

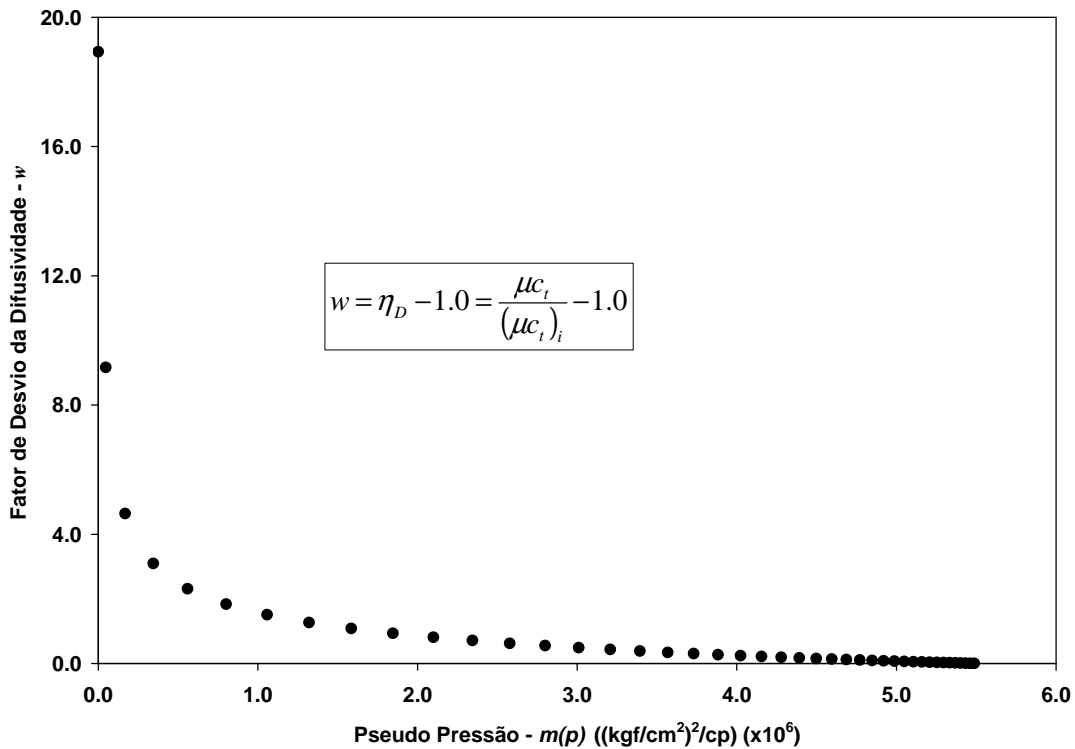


Figure 4.4: Comportamento do Desvio da Difusividade Hidráulica Adimensional

resultados comparativos para o termo de primeira ordem  $m_{D1}$ , da solução geral proposta nesse trabalho e a gerada por simulação por diferenças finitas são mostrados na figura 4.8. Embora possamos ver que os resultados dos dois gráficos são concordantes, algumas observações devem

Propriedade	Valor	Unidade
$k$	1	$mD$
$\phi$	0,1	—
$c_f$	0,000050	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_{gi}$	0,002513	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$\mu_i$	0,021086	$cp$
$p_i$	300	$kgf/cm^2$
$p_{sc}$	1,03323	$kgf/cm^2$
$T_{sc}$	15,6	$^{\circ}C$
$T_{wf}$	60	$^{\circ}C$
$h$	40	$m$
$q_{sc}$	400000	$m^3/dia$

Tabela 4.1: Radial Infinito - Propriedades de Rocha e Fluido

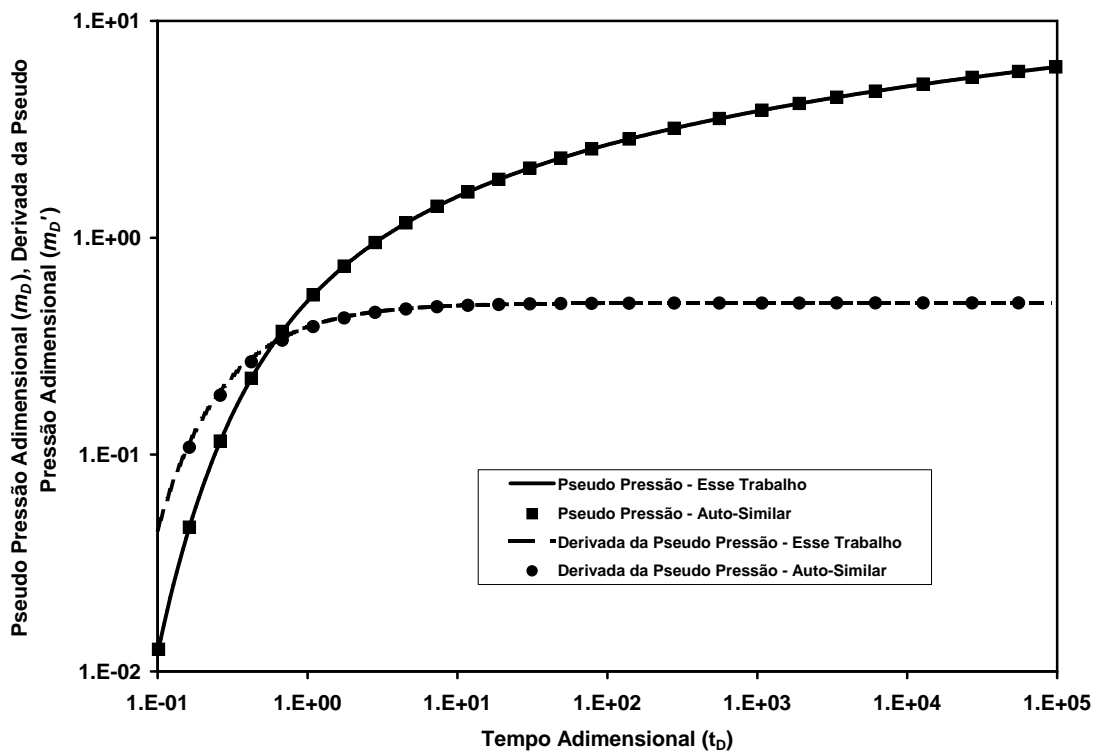


Figura 4.5: Pseudo Pressão Adimensional e Derivada - Radial Infinito

ser destacadas:

- A solução numérica só pode ser obtida para tempos adimensionais maiores que 1,0;
- Nos tempos iniciais há uma diferença entre as soluções por conta de problemas de discretização da malha;
- No caso da simulação por diferenças finitas, o termo não-linear representa toda a não-linearidade do problema e não somente o termo de primeira ordem. Nota-se que o truncamento nessa ordem da série infinita é suficiente para representar a solução.

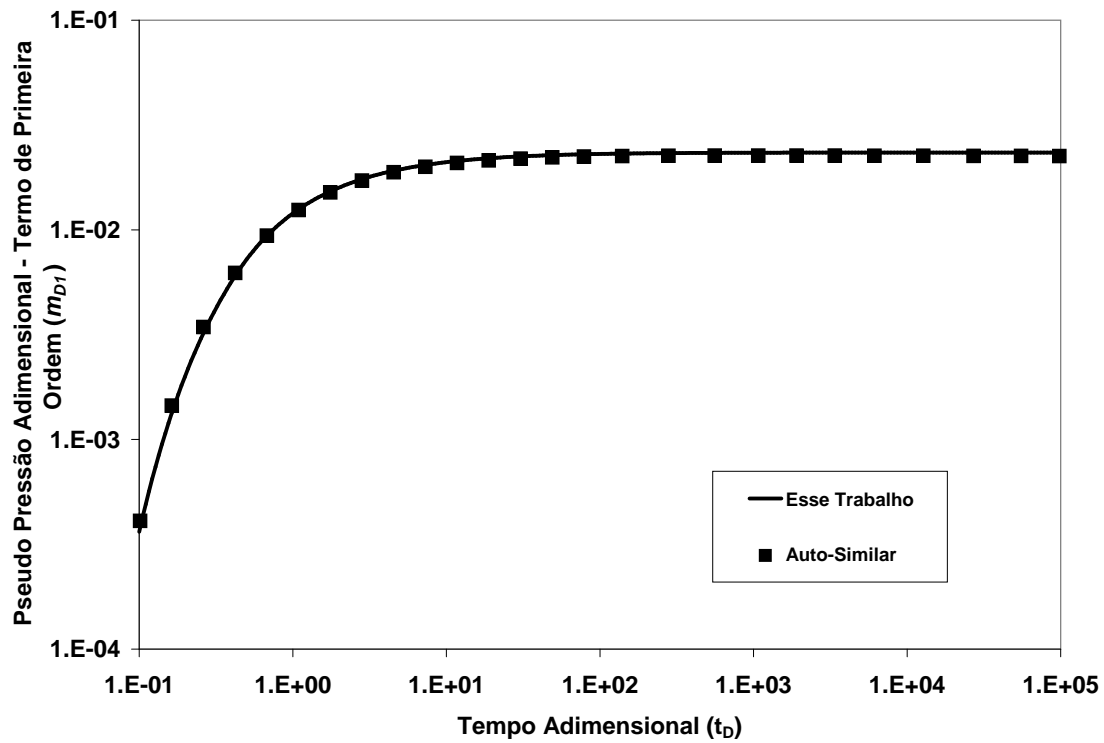


Figura 4.6: Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Radial Infinito

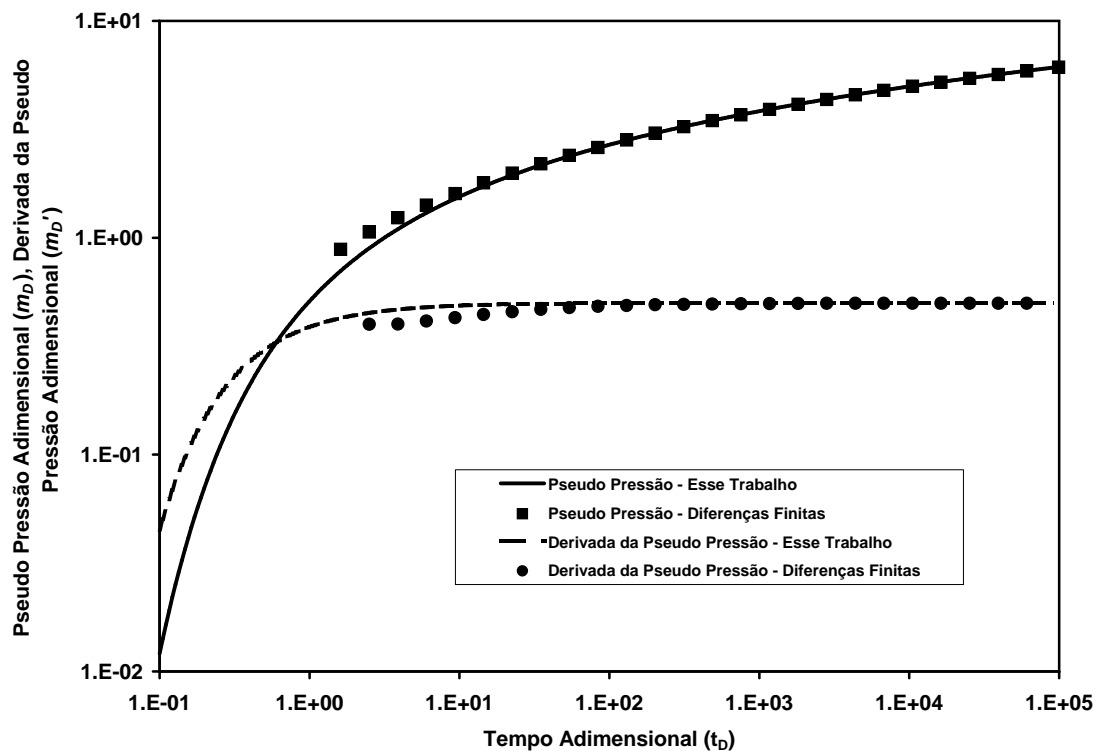


Figura 4.7: Comparação do Comportamento da Solução Propost Nesse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Radial Infinito

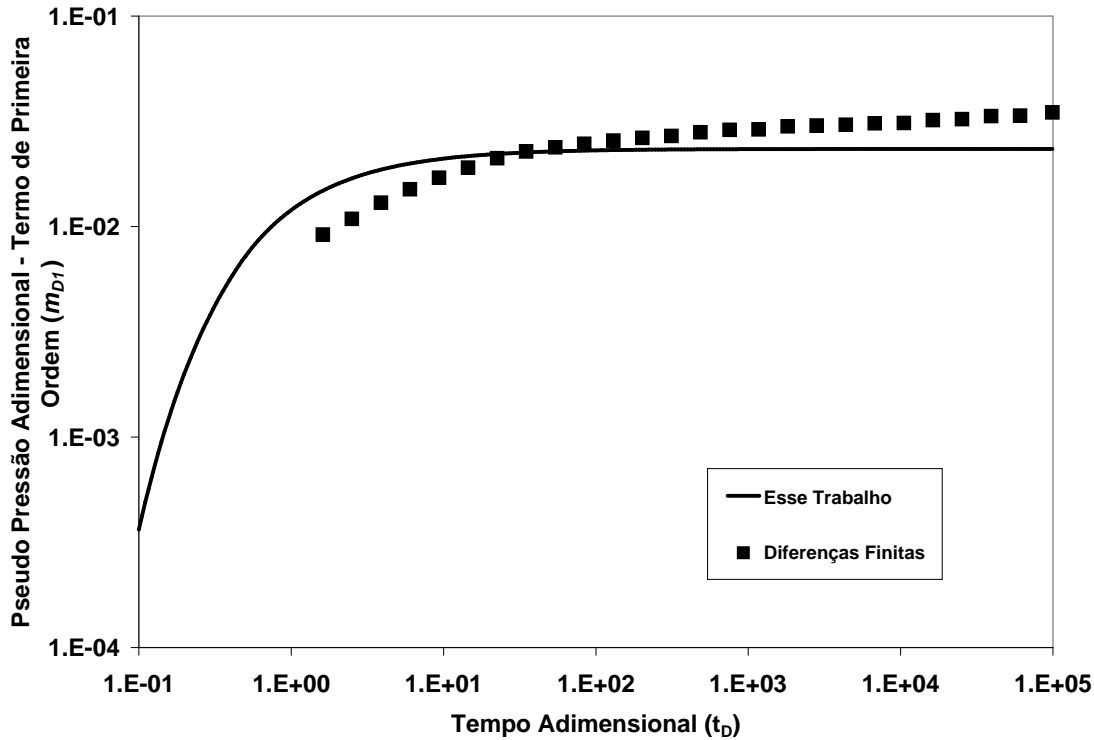


Figura 4.8: Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Radial Infinito

Um segundo modelo de diferenças finitas, em coordenadas cartesianas, foi construído para validar a solução do regime de fluxo radial infinito também em coordenadas cartesianas. Esse modelo servirá de base para a comparação das soluções do problema de um poço próximo a uma falha selante. O modelo de simulação foi dividido em 81 células na direção  $x$  e 81 na direção  $y$ . É importante ressaltar a necessidade de refinamentos sucessivos em torno da célula do poço no modelo cartesiano para que os erros de truncamento sejam minimizados. As curvas da pseudo pressão adimensional  $m_D$ , da derivada  $m'_D$  e do termo de primeira ordem  $m_{D1}$ , calculadas pela solução aqui proposta, em coordenadas cilíndricas e em coordenadas cartesianas, mostram a concordância entre elas (Figura 4.9)

A figura 4.10 apresenta as curvas da pseudo pressão adimensional  $m_D$ , da derivada logarítmica da pseudo pressão adimensional  $m'_D$  e do termo não-linear de primeira ordem  $m_{D1}$ , comparando a solução proposta nesse trabalho em coordenadas cartesianas e a simulação por diferenças finitas. O resultado é exatamente igual ao da solução analítica em coordenadas cilíndricas. As mesmas observações feitas para o caso anterior valem para esse.

## 4.2 Poço Próximo a uma Falha Selante

Um modelo de falha selante pode ser representado por uma barreira de fluxo nulo em uma direção do reservatório [33]. Vários sistemas geológicos podem ser modelados dessa forma: reservatórios com falhas, *pinch-outs*, etc. As hipóteses consideradas para esse modelo são as

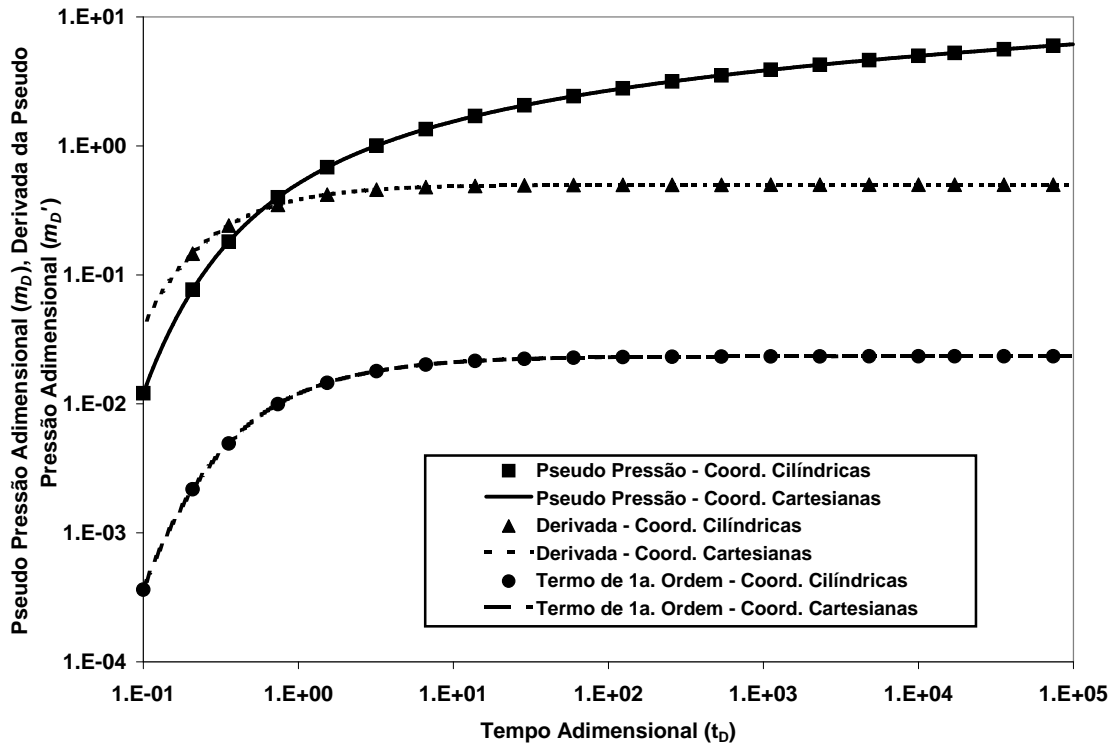


Figura 4.9: Solução Proposta Nesse Trabalho em Coordenadas Cilíndricas e Cartesianas - Radial Infinito

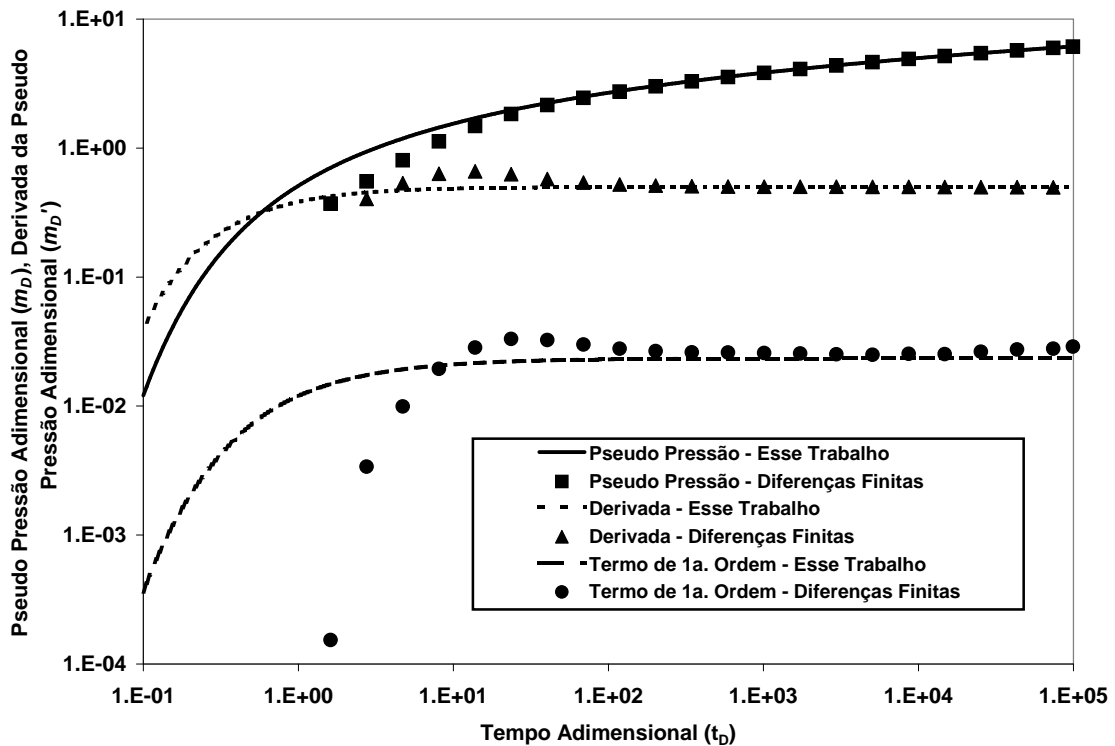


Figura 4.10: Comparação entre a Solução Proposta Nesse Trabalho e por Diferenças Finitas - Coordenadas Cartesianas

mesmas do caso anterior e a Figura 4.11 apresenta suas principais características.

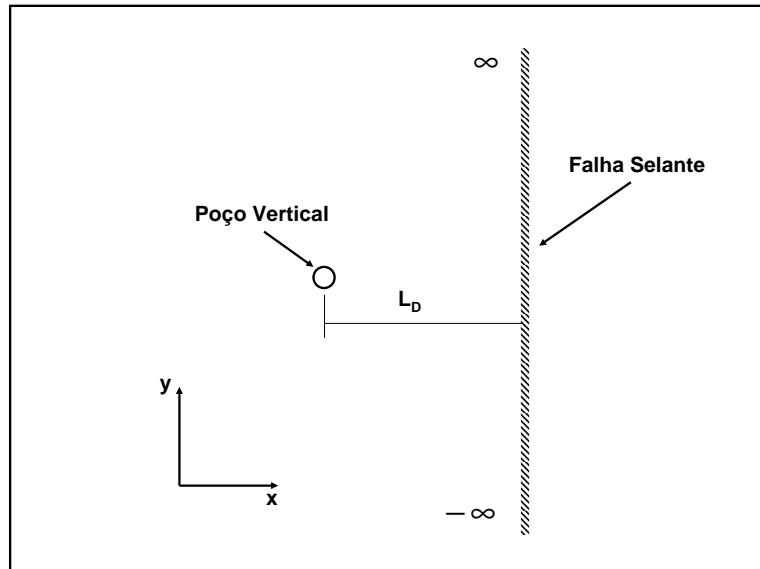


Figura 4.11: Falha Selante - Geometria

### 4.2.1 Formulação Matemática

Esse modelo, representado matematicamente por meio da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 m_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 m_D}{\partial y_D^2} - \eta_D \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(x_D, y_D, t_D), \quad (4.24)$$

a condições inicial

$$m_D(x_D, y_D, t_D = 0) = 0, \quad (4.25)$$

e a condição de contorno externo

$$\lim_{x_D, y_D \rightarrow \infty} m_D(x_D, y_D, t_D) = 0, \quad (4.26)$$

tem uma condição de contorno auxiliar, necessária para representar o fluxo nulo na falha selante, dada por:

$$\left( \frac{\partial m_D}{\partial x_D} \right)_{x_D=L_D} = 0. \quad (4.27)$$

Considerando a vazão constante, o termo fonte é

$$f(x_D, y_D, t_D) = \delta(x_D - 0) \delta(y_D - 0). \quad (4.28)$$

Aplicando a solução geral (3.41) nesse modelo, temos

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[ f(x'_D, y'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \right] \times \\ \times G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D, \quad (4.29)$$

ou

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} f(x'_D, y'_D, t'_D) G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D. \quad (4.30)$$

Substituindo a equação 4.28 em 4.30,

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \delta(x_D - 0) \delta(y_D - 0) G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D, \quad (4.31)$$

e aplicando a propriedade de amostragem da função  $\delta$ ,

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_0^{t_D} G_D(x_D, 0, y_D, 0, t_D, t'_D) dt'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D dy'_D, \quad (4.32)$$

onde  $G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D)$  é a função de Green para um sistema cartesiano semi-infinito [30, 31], ou esja,

$$G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) = \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) + \\ \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D - 2L_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right), \quad (4.33)$$

e para um poço localizado em  $x'_D = 0$  e  $y'_D = 0$ ,



$$G_D(x_D, 0, y_D, 0, t_D, t'_D) = \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{x_D^2 + y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) + \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{(x_D - 2L_D)^2 + y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right). \quad (4.34)$$

A equação 4.34 representa a derivada da solução de líquido em relação ao tempo. Substituindo as equações 4.33 e 4.34 na equação 4.32,

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = p_D(x_D, y_D, t_D) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \times \left\{ \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) + \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D - 2L_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) \right\} dt'_D dx'_D dy'_D \quad (4.35)$$

onde  $p_D(x_D, y_D, t_D)$  representa a solução para líquidos:

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = -\frac{1}{2} \mathbf{E}_i\left(-\frac{x_D^2 + y_D^2}{4t_D}\right) - \frac{1}{2} \mathbf{E}_i\left(-\frac{(x_D - L_D)^2 + y_D^2}{4t_D}\right) \quad (4.36)$$

e  $\mathbf{E}_i(-x)$  é a função integral-exponencial [32].

## 4.2.2 Validação

O conjunto de dados utilizados para testar a solução proposta é fundamentalmente o mesmo utilizado para o modelo radial infinito. As propriedades do fluido encontram-se nos gráficos 4.2, 4.3 e 4.4. Outros dados de rocha e fluido são apresentados na tabela 4.2. A distância à falha é de apenas 15 m para que o tempo de simulação por diferenças finitas não se torne excessivamente longo.

Os resultados comparativos da pseudo pressão adimensional  $m_D$  e da derivada logarítmica da pseudo pressão  $m'_D$  entre a solução analítica proposta nesse trabalho e a solução obtida por simulação por diferenças finitas são mostrados na figura 4.12. De forma similar a solução do modelo radial infinito, a solução numérica é obtida para tempos adimensionais maiores que 1,0. Também nos tempos iniciais ocorre um desvio da solução numérica em relação a solução analítica por causa dos efeitos de discretização da malha. Esses efeitos também podem ser observados nas curvas comparativas do termo de primeira ordem ( $m_{D1}$ ) da solução aqui proposta e da solução por diferenças finitas (Figura 4.13).

A mesma feição da curva da pseudo-pressão adimensional contra o tempo adimensional é reproduzida quando comparada com a solução por diferenças finitas em um gráfico semilog (Figura 4.14). Sabe-se que a solução para a pseudo pressão adimensional é dependente da vazão

Propriedade	Valor	Unidade
$k$	1	$mD$
$\phi$	0,1	—
$c_f$	0,000050	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_{gi}$	0,002513	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$\mu_i$	0,021086	$cp$
$p_i$	300	$kgf/cm^2$
$p_{sc}$	1,03323	$kgf/cm^2$
$T_{sc}$	15,6	$^{\circ}C$
$T_{wf}$	60	$^{\circ}C$
$h$	40	$m$
$q_{sc}$	400000	$m^3/dia$
$l$ (Distância à Falha)	15	$m$

Tabela 4.2: Falha Selante - Propriedades de Rocha e Fluido

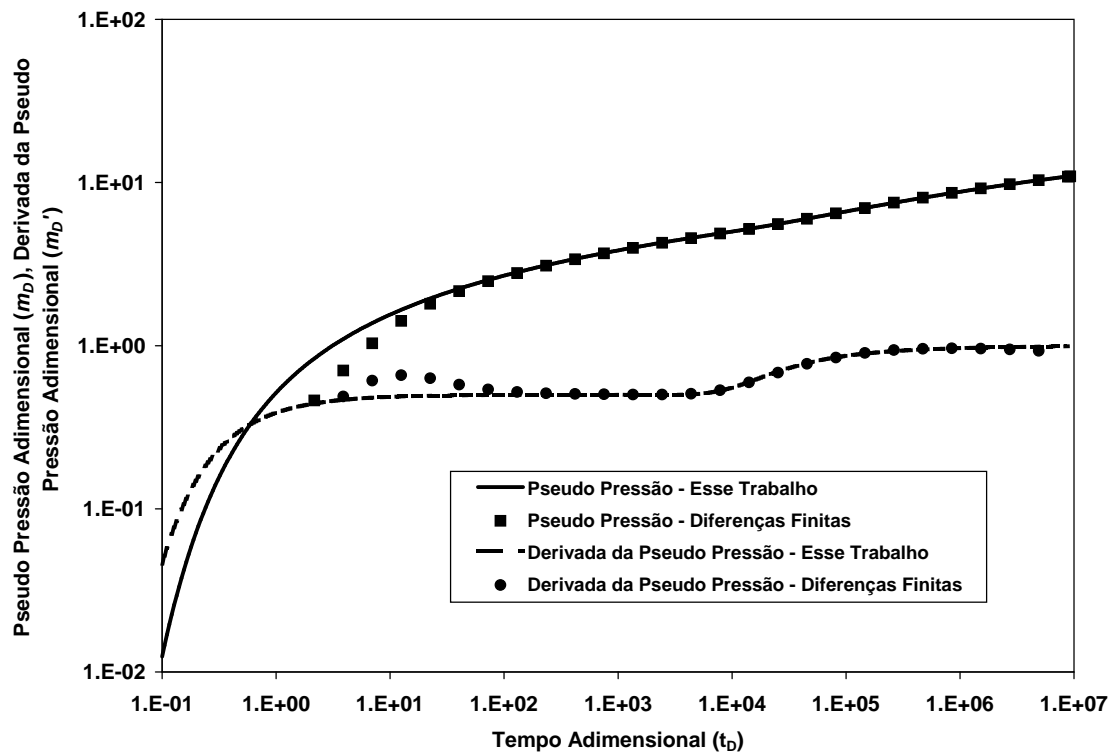


Figura 4.12: Resultados Comparativos para o Modelo de Falha Selante

[16, 17] e assim, um afastamento das soluções do gás em relação a do líquido em longos tempos é observado. Uma ampliação dos tempos finais comparando as soluções numérica e analítica da pseudo pressão adimensional  $m_D$  (mostrando uma excelente concordância entre elas), e o afastamento delas em relação a pressão adimensional,  $p_D$  é apresentada na Figura 4.15.

Outro aspecto a ser destacado é o da característica da inclinação das retas que representam os regimes de fluxo radial infinito e de presença de falha. A curva da pseudo pressão adimensional obtida pela solução proposta nesse trabalho comparada as retas com inclinações  $\alpha_1 = 0,5$  (característica do regime radial infinito para líquidos) e  $\alpha_2 = 1,0$  (característica da presença de

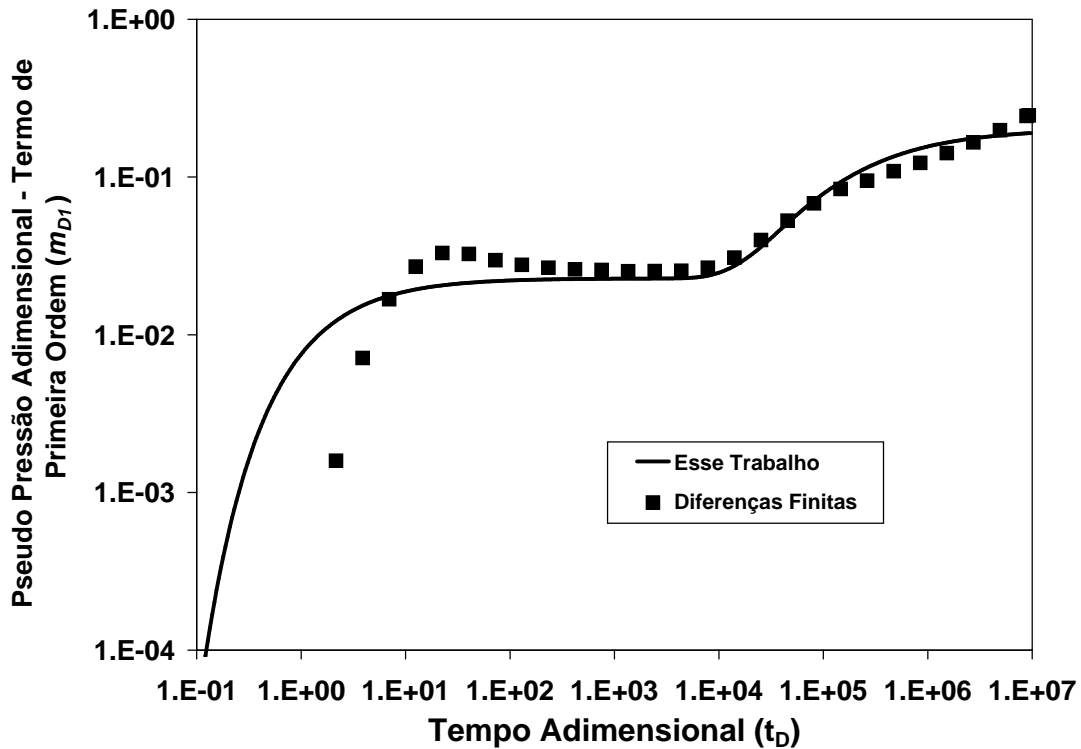


Figura 4.13: Termo Não-Linear de Primeira Ordem da Pseudo Pressão Adimensional - Comparação entre Esse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Falha Selante

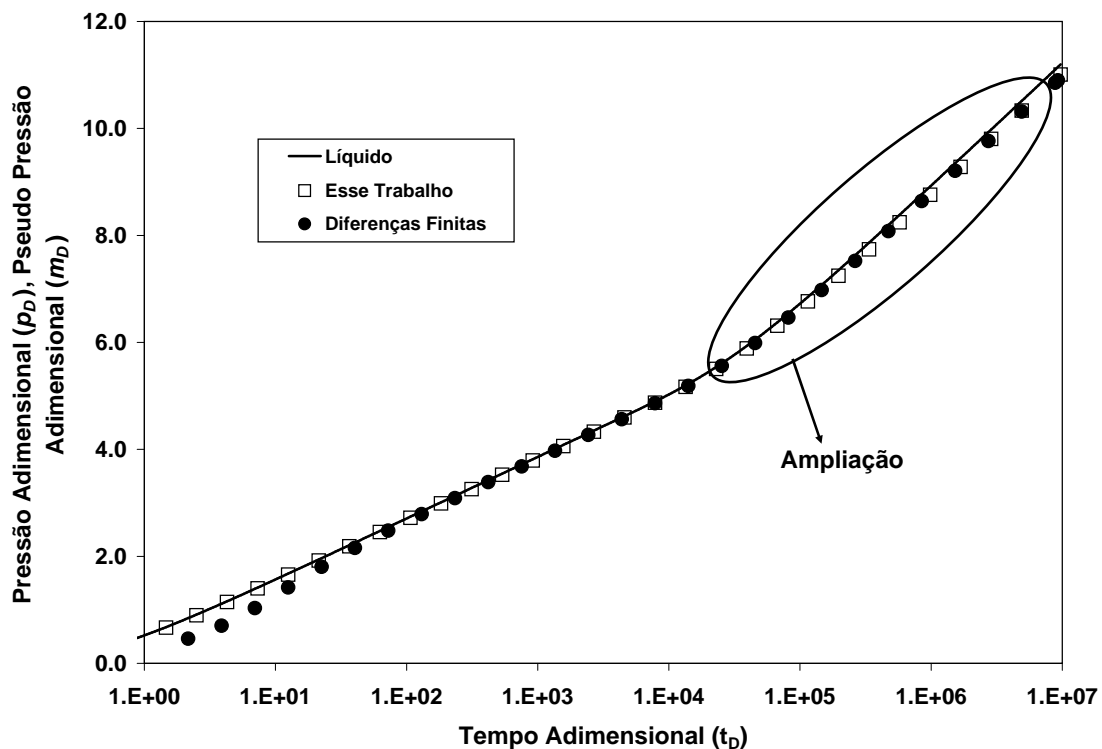


Figura 4.14: Solução do Problema da Falha Selante

falha selante na solução para líquidos) é apresentada (Figura 4.16), mostrando que a solução aqui proposta obedece às mesmas características.

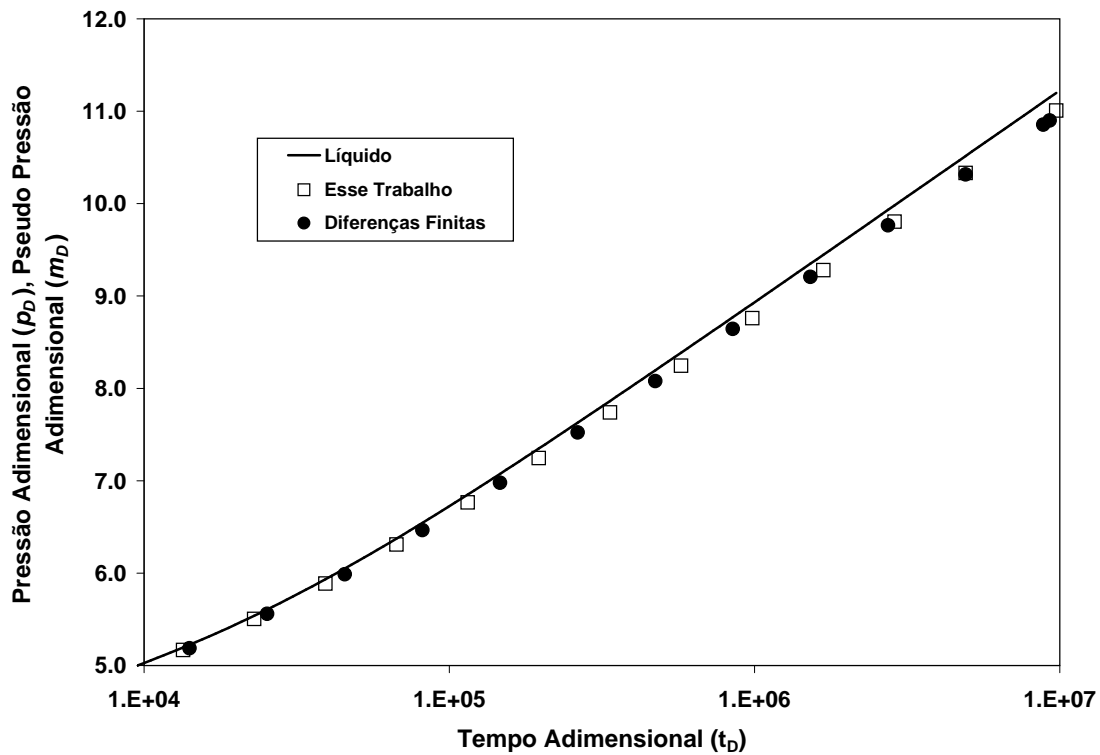


Figura 4.15: Ampliação da Região de Longos Tempos da Solução do Problema da Falha Selante

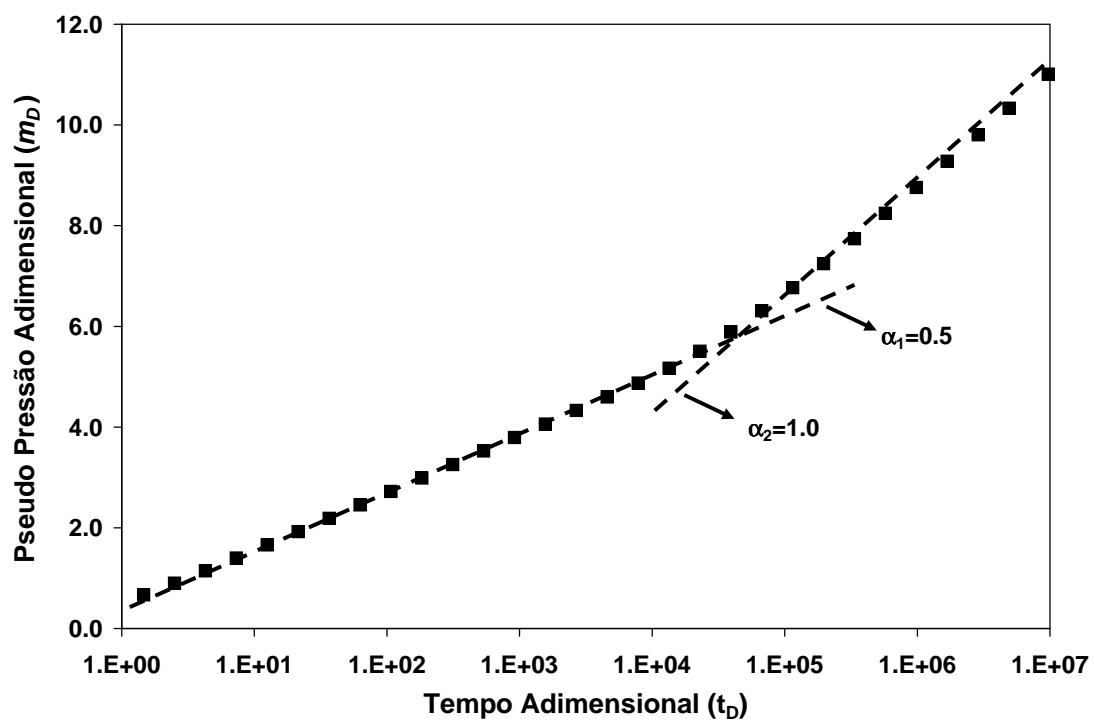


Figura 4.16: Comportamento Típico de Poço Próximo a Uma Falha Selante

Portanto é possível resolver o problema inverso, ou seja, determinar a permeabilidade e a distância do poço a falha utilizando-se os gráficos diagnóstico (Figura 4.17) e especializado 4.18. Os resultados da interpretação podem ser vistos na Tabela 4.3.

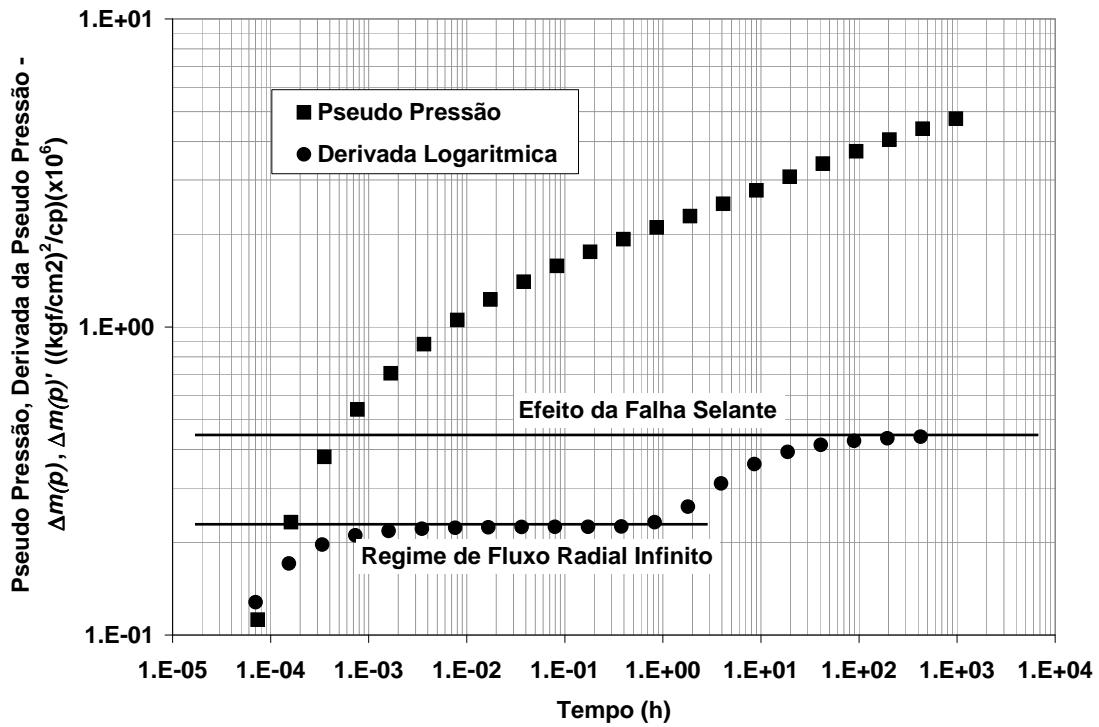


Figura 4.17: Falha Selante - Gráfico Diagnóstico - Regimes de Fluxo

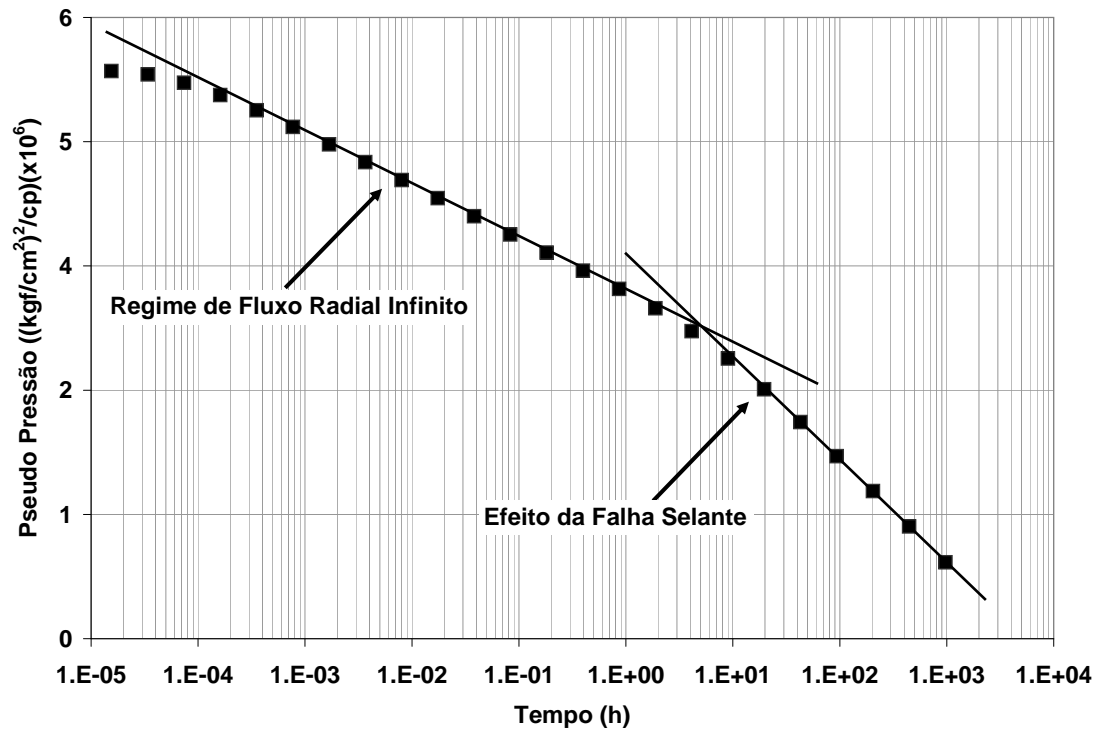


Figura 4.18: Falha Selante - Gráfico Especializado - Determinação da Permeabilidade e da Distância à Falha

### 4.3 Fratura de Extensão Infinta

As hipóteses consideradas neste modelo são fundamentalmente as mesmas dos modelos anteriores. Sua representação esquemática pode ser vista na Figura 4.19.

Propriedade	Modelo	Interpretação
$k$ ( $mD$ )	1,0	0,95
$l$ ( $m$ ) (Distância a Falha)	15,0	15,01

Tabela 4.3: Falha Selante - Resultados Interpretados

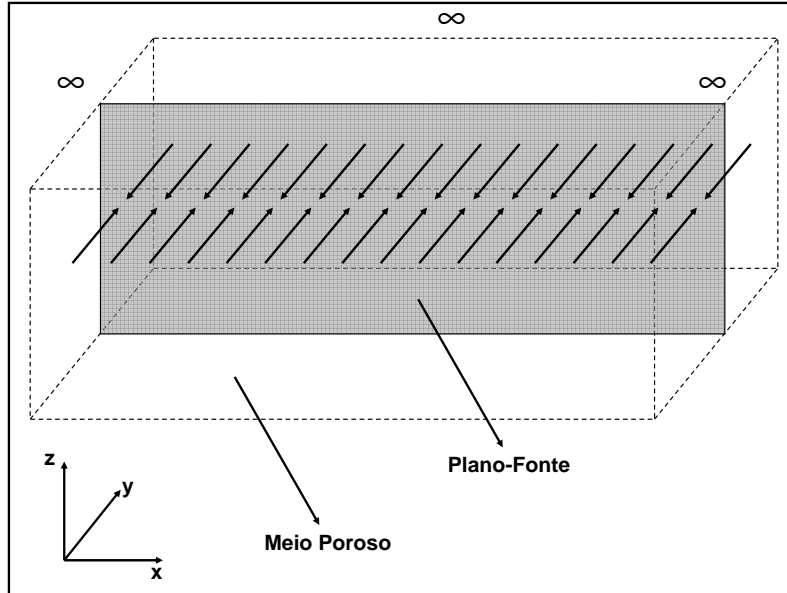


Figure 4.19: Fratura de Extensão Infinita - Geometria

### 4.3.1 Formulação Matemática

A equação diferencial parcial e suas condições inicial e de contorno externo, que representam matematicamente esse modelo são

$$\frac{\partial^2 m_D}{\partial y_D^2} - \eta \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(y_D, t_D), \quad (4.37)$$

$$m_D(y_D, t_D = 0) = 0, \quad (4.38)$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} m_D(y_D, t_D) = 0. \quad (4.39)$$

Embora o modelo seja representativo de uma fratura infinita, é necessário escolher uma dimensão característica  $l_c$  para a definição do tempo adimensional. Essa dimensão característica é a meia-extensão da fratura  $x_f$ . Assim, o tempo adimensional  $t_D$  é definido por

$$t_D = t_{D_{x_f}} = \frac{kt}{\phi(\mu c_t)_i x_f^2}. \quad (4.40)$$

Considerando que a fratura corta o plano  $x - z$ ,  $\frac{\partial m_D}{\partial x_D} = \frac{\partial m_D}{\partial z_D} = 0$ . Então,

$$m_D(y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[ f(y'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \right] G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D. \quad (4.41)$$

Definindo uma fonte constante no tempo ao longo da fratura,

$$f(y_D, t_D) = f(y_D) = \frac{\pi}{2} \delta(y_D - 0), \quad (4.42)$$

e substituindo 4.42 em 4.41,

$$m_D(y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \frac{\pi}{2} \delta(y_D - 0) G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D, \quad (4.43)$$

Aplicando a propriedade da amostragem da função  $\delta$  na equação 4.43, é possível obter

$$m_D(y_D, t_D) = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_D} G_D(y_D, 0, t_D, t'_D) dt'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D. \quad (4.44)$$

A função de Green de uma geometria cartesiana com uma fonte linear infinita [30, 31] é definida por

$$G_D(y_D, y_{D_0}, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{2\sqrt{(t_D - t_{D_0})}} \exp\left(-\frac{(y_D - y_{D_0})^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right). \quad (4.45)$$

Calculando o valor da função de Green na posição do plano-fonte,

$$G_D(y_D, 0, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{2\sqrt{(t_D - t_{D_0})}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right), \quad (4.46)$$

e substituindo 4.46 em 4.44

$$m_D(y_D, t_D) = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_D} \frac{1}{2\sqrt{(t_D - t'_D)}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D. \quad (4.47)$$

Mas

$$p_D(y_D, t_D) = \frac{\pi}{2} \int_0^{t_D} \frac{1}{2\sqrt{(t_D - t'_D)}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D \quad (4.48)$$

ou

$$p_D(y_D, t_D) = 2 \frac{\sqrt{t_D}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4t_D}\right) - y_D \operatorname{erfc}\left(\frac{y_D}{2\sqrt{t_D}}\right), \quad (4.49)$$

onde  $\operatorname{erfc}(x)$  é a função Erro Complementar [32]. A expressão 4.49 representa a solução para um fluido pouco compressível produzido por uma fratura de extensão infinita. Substituindo 4.49 em 4.47,

$$m_D(y_D, t_D) = p_D(y_D, t_D) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D. \quad (4.50)$$

### 4.3.2 Validação

Os dados utilizados para testar a solução proposta neste modelo de fratura de extensão infinita são os mesmos utilizados para os modelos anteriores (radial infinito e poço próximo a falha selante). As propriedades físicas do fluido encontram-se nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4. Outros dados de rocha e fluido são apresentados na Tabela 4.4.

Propriedade	Valor	Unidade
$k$	1	$mD$
$\phi$	0,1	—
$c_f$	0,000050	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_{gi}$	0,002513	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$\mu_i$	0,021086	$cp$
$p_i$	300	$kgf/cm^2$
$p_{sc}$	1,03323	$kgf/cm^2$
$T_{sc}$	15,6	$^{\circ}C$
$T_{wf}$	60	$^{\circ}C$
$h$	5	$m$
$q_{sc}$	101000	$m^3/dia$
$l_c = x_f$	101	$m$

Tabela 4.4: Fratura de Extensão Infinita - Propriedades de Rocha e Fluido

O modelo de diferenças finitas em coordenadas cartesianas, construído para validar a solução proposta nesse trabalho, foi dividido em 101 células na direção  $x$  e 81 na direção  $y$ . A representação da fratura no modelo numérico foi feita da seguinte forma: para todas as células com locação  $y = 41$ , foi posicionado um poço totalizando um conjunto de 101 poços cada um produzindo com vazão de  $1000m^3/dia$ . É necessário refinar sucessivamente as células na direção  $y$ , próximo a fratura para que os erros de truncamento sejam minimizados.

A característica do regime de fluxo linear (inclinação de 0,5 na curva da pseudo pressão e da derivada logarítmica da pseudo pressão) é repetida pela solução aqui proposta (Figura 4.20). As curvas do termo não-linear de primeira ordem pode ser vista na Figura 4.21. Ambas as curvas mostram que os resultados são extremamente concordantes, ou seja, a solução aqui proposta reproduz o resultado esperado. No entanto, nos tempos iniciais, verifica-se novamente



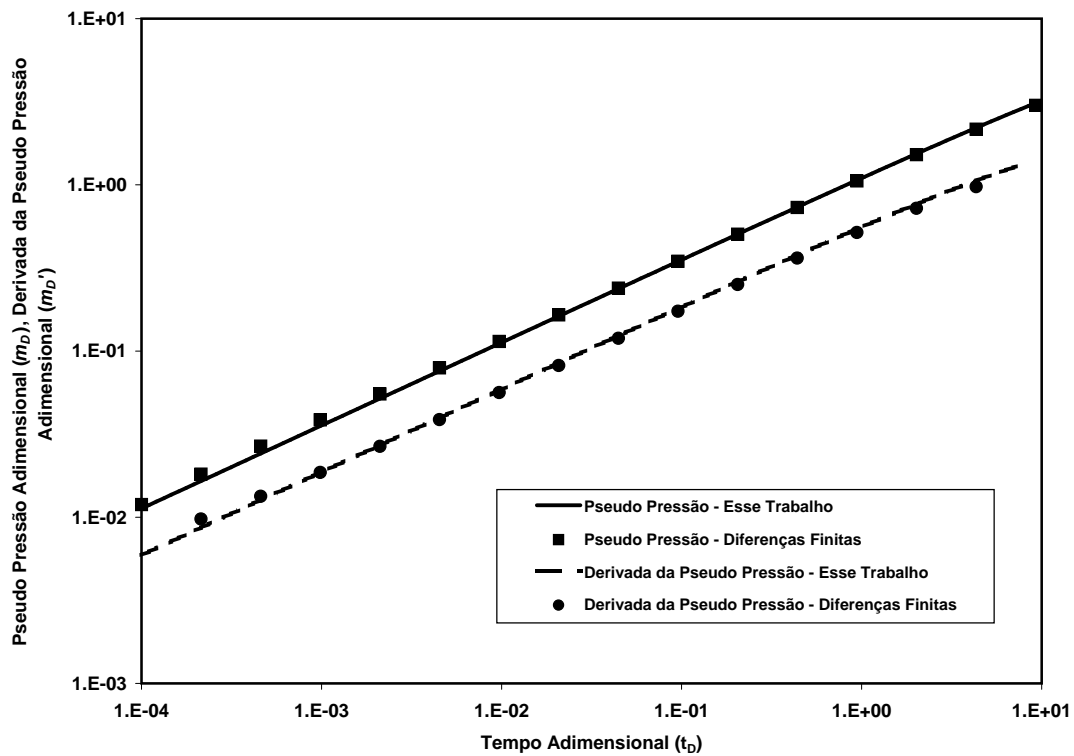


Figura 4.20: Comparação da Pressão e Derivada Logarítmica entre Esse Trabalho e a Simulação por Diferenças Finitas - Fratura de Extensão Infinita

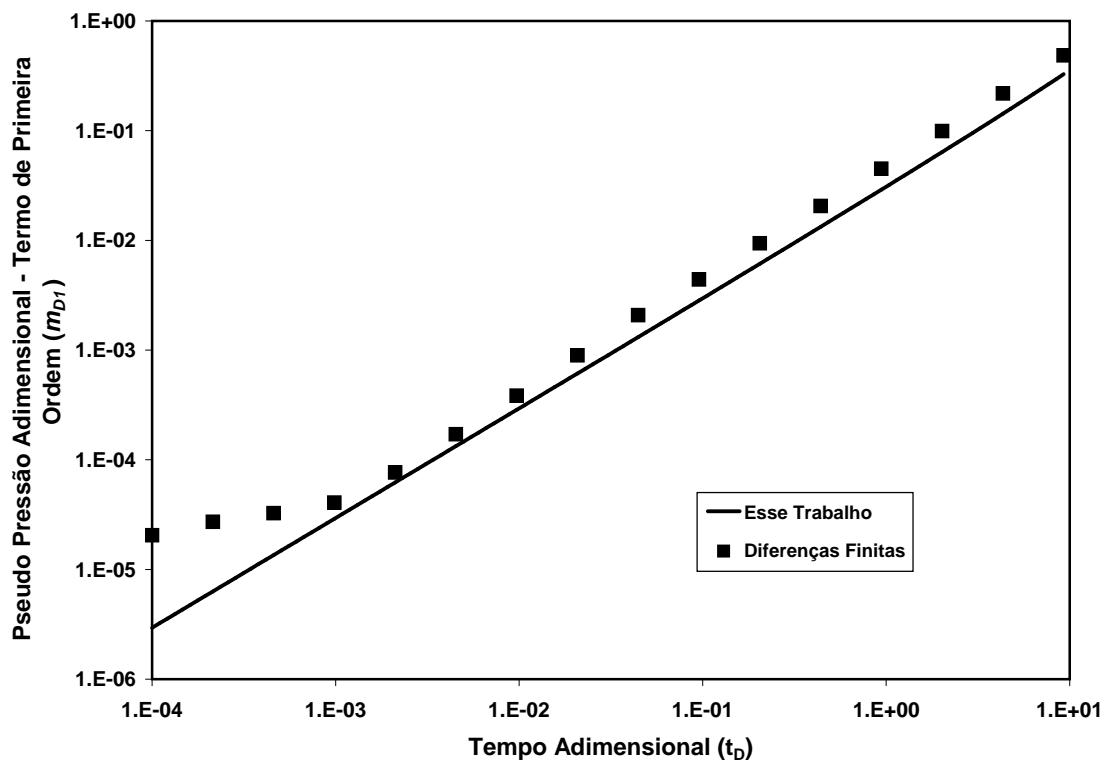


Figura 4.21: Termo Não-Linear de Primeira Ordem - Fratura de Extensão Infinita

o problema de discretização da malha resultando em um desvio da solução por diferenças finitas em relação à solução aqui proposta.

## 4.4 Fratura Hidráulica de Condutividade Uniforme

As hipóteses simplificadoras utilizadas neste modelo são as mesmas que o anterior com a diferença que a extensão da fratura é finita. A Figura 4.22 representa esquematicamente esse modelo.

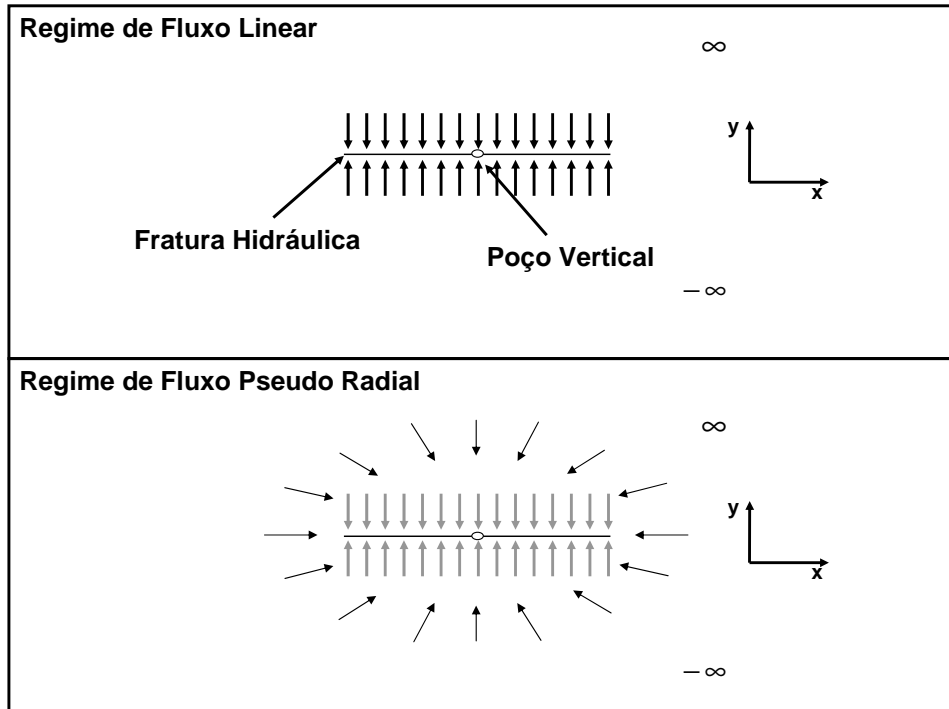


Figura 4.22: Fratura Hidráulica - Geometria

### 4.4.1 Formulação Matemática

A formulação matemática desse modelo é dada pela equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 m_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 m_D}{\partial y_D^2} - \eta \frac{\partial m_D}{\partial t_D} = f(x_D, y_D, t_D) \quad (4.51)$$

pela condições inicial,

$$m_D(x_D, y_D, t_D = 0) = 0, \quad (4.52)$$

e pela condição de contorno externa,

$$\lim_{x_D, y_D \rightarrow \infty} m_D(x_D, y_D, t_D) = 0, \quad (4.53)$$

A fratura é finita, ou seja, a dimensão característica  $l_c$  é a meia-extensão da fratura  $x_f$  para uma definição apropriada do tempo adimensional. O tempo adimensional  $t_D$  é definido por

$$t_D = t_{D_{x_f}} = \frac{kt}{\phi(\mu c_t)_i x_f^2} \quad (4.54)$$

Assim a solução geral dada pela equação 3.41 se reduz a

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[ f(x'_D, y'_D, t'_D) + w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} \right] G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D \quad (4.55)$$

Definindo uma fonte constante no tempo ao longo da fratura,

$$f(x_D, y_D, t_D) = f(x_D, y_D) = \begin{cases} 0 & x_D < -1 \\ \frac{\pi}{2} \delta(y_D - 0) & -1 < x_D < 1 \\ 0 & x_D > 1 \end{cases} \quad (4.56)$$

e substituindo 4.56 em 4.55,

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} \frac{\pi}{2} \delta(y_D - 0) G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D \quad (4.57)$$

Aplicando a propriedade da amostragem da função  $\delta$  na equação 4.57, temos

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, 0, t_D, t'_D) dt'_D dx'_D + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D. \quad (4.58)$$

A função de Green para uma geometria infinita cartesiana com uma fonte linear finita [30, 31] é definida como

$$G_D(x_D, x_{D_0}, y_D, y_{D_0}, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{4(t_D - t_{D_0})} \exp\left(-\frac{(x_D - x_{D_0})^2 + (y_D - y_{D_0})^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right). \quad (4.59)$$

Calculando o valor da função de Green 4.59 na fonte

$$G_D(x_D, x_{D_0}, y_D, 0, t_D, t_{D_0}) = \frac{1}{4(t_D - t_{D_0})} \exp\left(-\frac{(x_D - x_{D_0})^2 + (y_D - 0)^2}{4(t_D - t_{D_0})}\right), \quad (4.60)$$

e substituindo 4.60 em 4.58

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{t_D} \frac{1}{4(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2 + (y_D - 0)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dt'_D dx'_D + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D \quad (4.61)$$

$$m_D(x_D, y_D, t_D) = p_D(x_D, y_D, t_D) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_D}{\partial t_D} G_D(x_D, x'_D, y_D, y'_D, t_D, t'_D) dt'_D dy'_D dx'_D \quad (4.62)$$

onde  $p_D(x_D, y_D, t_D)$  representa a solução para um fluido de pequena compressibilidade para fratura finita, dada por

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = -\frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 Ei\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2 + (y_D - 0)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dx'_D \quad (4.63)$$

e  $Ei(x)$  é a função Integral Exponencial [32].

#### 4.4.2 Validação

Como nos exemplos anteriores o conjunto de dados utilizados para testar o modelo de fratura hidráulica é o mesmo (Figuras 4.2, 4.3 e 4.4). Os dados de rocha e fluido são apresentados na Tabela 4.5.

Propriedade	Valor	Unidade
$k$	1	$mD$
$\phi$	0,1	—
$c_f$	0,000050	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_{gi}$	0,002513	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$\mu_i$	0,021086	$cp$
$p_i$	300	$kgf/cm^2$
$p_{sc}$	1,03323	$kgf/cm^2$
$T_{sc}$	15,6	$^{\circ}C$
$T_{wf}$	60	$^{\circ}C$
$h$	5	$m$
$q_{sc}$	151500	$m^3/dia$
$l_c = x_f$	50,5	$m$

Tabela 4.5: Fratura Hidráulica - Propriedades de Rocha e Fluido

O modelo de diferenças finitas em coordenadas cartesianas, construído para validar a solução proposta nesse trabalho, foi dividido em 141 células na direção  $x$  e 81 na direção  $y$ . A representação da fratura no modelo numérico foi feito da seguinte forma: para as células com locação  $x = 21$  a  $121$  e  $y = 41$ , foi posicionado um poço totalizando um conjunto de 101 poços cada um produzindo a vazão de  $1500 m^3/dia$  (vazão total de  $151500 m^3/dia$ ). É necessário refinar

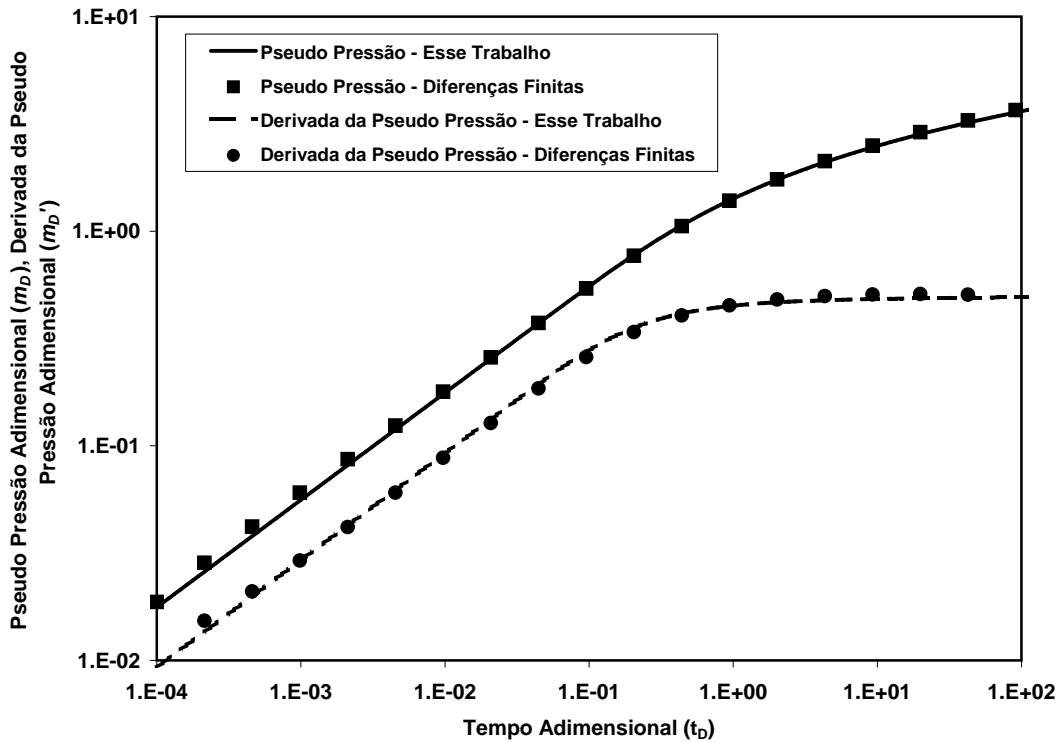


Figura 4.23: Pseudo Pressão Adimensional e Derivada - Fratura Hidráulica

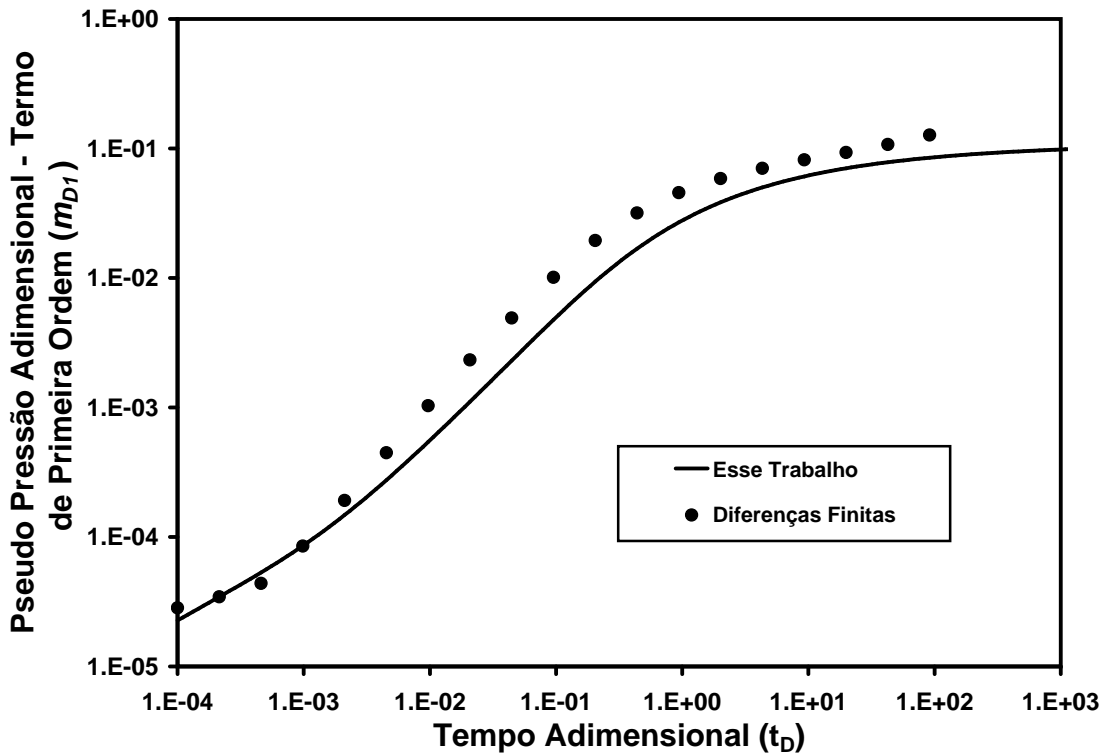


Figura 4.24: Termo Não-Linear de Primeira Ordem - Fratura Hidráulica

sucessivamente as células na direção  $y$ , próximo a fratura e também nas células próximas a  $x = 21$  e  $x = 121$  na direção  $x$ , para que os erros de truncamento sejam minimizados.

Os resultados obtidos pela solução da equação 4.62 e o modelo de diferenças finitas apresen-

tam excelente concordância (Figura 4.23). A inclinação característica do regime de fluxo linear (0,5) e o patamar característico de regime de fluxo pseudo-radial no longo tempo se mostram presentes. O termo de primeira ordem da expansão assintótica pode ser vista na figura 4.24. Embora ambas as curvas mostrem extrema concordância verifica-se nos tempos iniciais um pequeno desvio da solução numérica em relação à solução analítica em função da discretização no modelo de diferenças finitas.

# Capítulo 5

## Soluções para Vazão Variável

Como já citado no Capítulo 2, diversos autores consideram por simplificação que, sob determinadas condições, o princípio de Duhamel (solução clássica para produção com vazão variável de fluidos pouco compressíveis) pode ser utilizado para resolver a equação da difusividade do gás. Na primeira seção desse capítulo será apresentada uma análise crítica da aplicabilidade do princípio de Duhamel como solução da EDH do gás. Será mostrado matematicamente que a aplicação deste princípio leva a um erro residual, função do termo não-linear  $\eta_D$ . Em consequência, na seção seguinte, a solução para o problema de vazão variável é apresentada tomando por base a técnica proposta nesse trabalho.

### 5.1 Aplicação do Princípio de Duhamel como Solução da Equação da Difusividade do Gás

Para apresentar esse problema, será utilizada a formulação adimensional da equação da difusividade do gás em coordenadas cilíndricas com suas respectivas condição inicial e condições de contorno interna e externa:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial r_D} \right) = \eta_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D}, \quad (5.1)$$

$$m_{DV}(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (5.2)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{DV}(r_D, t_D) = 0, \quad (5.3)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left( r_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial r_D} \right) = -q_{wD}(t_D). \quad (5.4)$$

Considerando válida a aplicação do princípio de Duhamel, dado por

$$m_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau, \quad (5.5)$$

como solução do problema 5.1-5.4, pode-se calcular as derivadas espacial e temporal da pseudo pressão adimensional,

$$\frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} = \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} r_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial r_D} &= r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = \\ &= r_D \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D} d\tau, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial r_D} \right) &= \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D} d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial^2 m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D^2} d\tau. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo as equações 5.6 e 5.8 em 5.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \left( q_{wD}(\tau) \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D} + q_{wD}(\tau) \frac{\partial^2 m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D^2} \right) d\tau + \\ - \eta_D(t_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

e somando e subtraindo o termo

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau, \quad (5.10)$$

à equação 5.9,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \left( q_{wD}(\tau) \left[ \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} \right] \right) d\tau + \\ \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau + \\ - \eta_D(t_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mas

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial r_D^2} - \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} = 0, \quad (5.12)$$



ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau + \\ - \eta_D(t_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau - \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0. \quad (5.14)$$

A expressão 5.14 pode facilmente ser verificada para  $\eta_D$  constante (solução para fluidos pouco compressíveis),

$$\eta_D \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau - \eta_D \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0, \quad (5.15)$$

ou seja

$$\eta_D \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \eta_D \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (5.16)$$

É possível provar também que a equação 5.14 pode ser aplicada para o problema de vazão constante ( $q_{wD} = 1$ ).

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} 1 \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau - \eta_D(t_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} 1 \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = 0. \quad (5.17)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$u = t_D - \tau, \quad du = -d\tau, \quad (5.18)$$

e expandindo o primeiro termo da expressão 5.17, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau = \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \eta_D(u) \frac{\partial m_{DC}(r_D, u)}{\partial u} du, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \eta_D(u) \frac{\partial m_{DC}(r_D, u)}{\partial u} du = \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (5.20)$$

A partir do segundo termo da expressão 5.17, temos

$$\eta_D(t_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \frac{\partial m_{DC}(r_D, u)}{\partial u} du = \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D)}{\partial t_D}, \quad (5.21)$$

que resulta em

$$\eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (5.22)$$

Dessa forma, nota-se que a expressão 5.14 se aplica ao problema de fluidos pouco compressíveis de vazão variável e de vazão constante. No caso de vazão variável de gás, no entanto, ao retornar à equação 5.14

$$\frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau - \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0, \quad (5.23)$$

e aplicando o teorema do valor médio para integrais definidas [34], obtemos

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx, \quad (5.24)$$

onde  $c$  está entre  $a$  e  $b$ , ao primeiro termo da equação 5.23,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \eta_D(t_D - \tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau &= \\ \frac{\partial}{\partial t_D} \eta_D(\hat{t}_D) \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau &= \\ \eta_D(\hat{t}_D) \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_{wD}(\tau) \frac{\partial m_{DC}(r_D, t_D - \tau)}{\partial t_D} d\tau &= \\ \eta_D(\hat{t}_D) \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D}. & \end{aligned} \quad (5.25)$$

Substituindo 5.25 em 5.23,

$$\eta_D(\hat{t}_D) \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - \eta_D(t_D) \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0, \quad (5.26)$$

que é equivalente a

$$[\eta_D(\hat{t}_D) - \eta_D(t_D)] \frac{\partial m_{DV}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0. \quad (5.27)$$

Logo, a simplificação do uso do princípio de Duhamel na solução da equação da difusividade do gás para o problema de vazão variável leva a um erro residual calculado pela expressão 5.27.

## 5.2 Solução Geral para Vazão Variável

A mesma técnica utilizada para resolver o problema de vazão constante de gás, apresentada no Capítulo 3, será aplicada para o problema com vazão variável, com suas respectivas condições inicial e de contorno externo:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial r_D} \right) - \eta_D \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} = f(r_D, t_D) \quad (5.28)$$

$$m_{DV}(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (5.29)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{DV}(r_D, t_D) = 0, \quad (5.30)$$

cuja solução é expressa por:

$$m_{DV}(r_D, t_D) = p_{DV}(r_D, t_D) + m_{DV}^{(1)}(r_D, t_D), \quad (5.31)$$

onde

$$p_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} f(r'_D, t'_D) G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.32)$$

e

$$m_{DV}^{(1)}(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} w(p_{DV}) \frac{\partial p_{DV}}{\partial t'_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (5.33)$$

O termo fonte é definido por

$$f(r_D, t_D) = q_{wD}(t_D) \delta(r_D - 0). \quad (5.34)$$

Substituindo o termo-fonte (equação 5.34) em 5.32,

$$p_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} q_{wD}(t_D) \delta(r_D - 0) G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.35)$$

e aplicando a propriedade de amostragem da função  $\delta$ , vem

$$p_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(t_D) G_D(r_D, 0, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (5.36)$$

Mas a função de Green para uma geometria radial é dada por

$$G_D(r_D, 0, t_D, t'_D) = \frac{1}{2(t_D - t'_D)} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right), \quad (5.37)$$

e assim:

$$p_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(t_D) \frac{\partial p_{DC}}{\partial t'_D} dt'_D dr'_D, \quad (5.38)$$

que é o próprio princípio de Duhamel. Assim, substituindo 5.38 em 5.31, a solução geral para a equação da difusividade não-linear do gás com vazão variável torna-se:

$$m_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_{wD}(t_D) \frac{\partial p_{DC}}{\partial t'_D} dt'_D dr'_D + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w(p_{DV}) \frac{\partial p_{DV}}{\partial t'_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.39)$$

### 5.3 Teste de Crescimento de Pressão

Esse tipo de teste é conduzido de forma a colocar um poço em produção com vazão constante e estabilizada por um determinado tempo de produção  $t_p$ . Nesse instante, o poço é fechado levando ao crescimento da pressão no poço e no reservatório (Figura 5.1). A partir dos dados

de pressão medidos nos poços é possível estimar propriedades do conjunto poço/reservatório, tais como permeabilidade, dano à formação, etc. As curvas de pressão do período de estática (*buildup*) apresentam menos ruído que as curvas do período de fluxo (*drawdown*), sendo em geral mais utilizadas para a interpretação de testes.

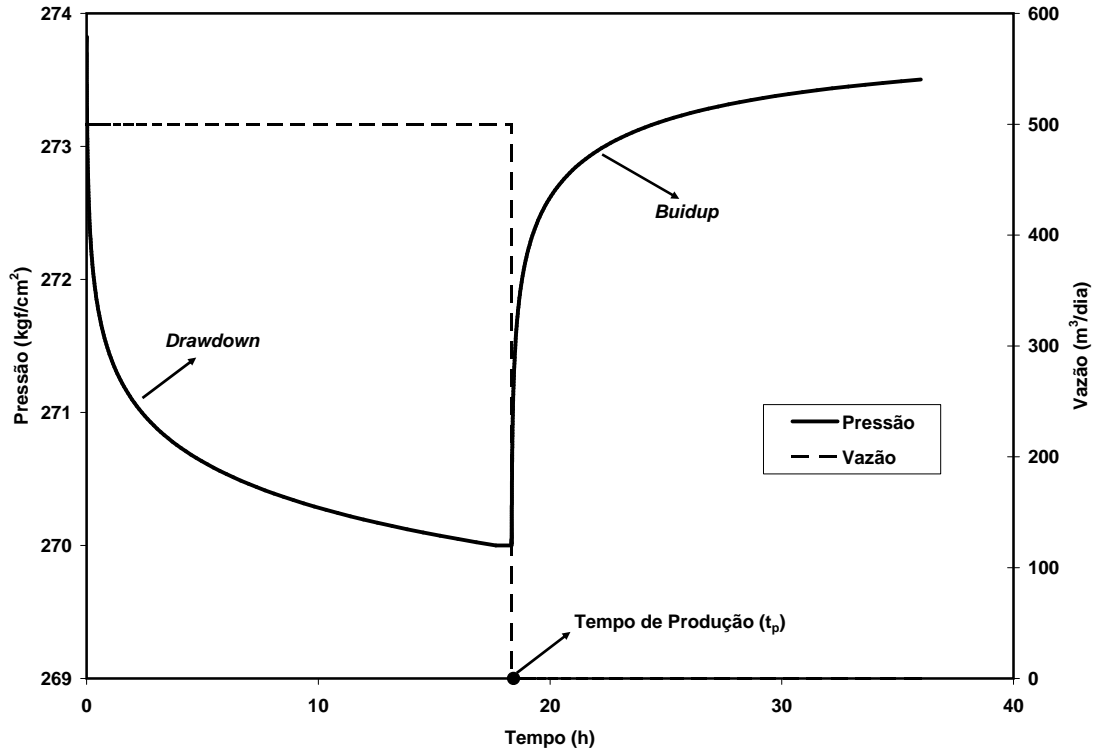


Figure 5.1: Esquema de um Teste de Crescimento de Pressão

### 5.3.1 Formulação Matemática

Definindo o seguinte esquema de vazão de gás

$$q_{wD}(t_D) = \begin{cases} 1, & t_D < t_{pD} \\ 0, & t_D > t_{pD} \end{cases} \quad (5.40)$$

e substituindo 5.40 em 5.39

$$m_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_{pD}} 1 \frac{\partial p_{DC}(r_D, t_D - t'_D)}{\partial t_D} dt'_D + \int_{t_{pD}}^{t_D} 0 \frac{\partial p_{DC}(r_D, t_D - t'_D)}{\partial t_D} dt'_D + \\ + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.41)$$

temos

$$m_{DV}(r_D, t_D) = -p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD}) + p_{DC}(r_D, t_D) + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.42)$$

Chamando

$$t_D = t_{pD} + \Delta t_D \quad (5.43)$$

então

$$m_{DV}(r_D, t_D) = p_{DC}(r_D, t_{pD} + \Delta t_D) - p_{DC}(r_D, \Delta t_D) + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (5.44)$$

Note que  $\int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D$  representa o desvio da solução de líquido devido à não-linearidade. Do ponto de vista computacional é interessante dividir a integral no tempo em dois termos. Assim, a equação 5.44 torna-se

$$m_{DV}(r_D, t_D) = p_{DC}(r_D, t_{pD} + \Delta t_D) - p_{DC}(r_D, \Delta t_D) + \int_0^\infty \int_0^{t_{pD}} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D + \int_0^\infty \int_{t_{pD}}^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.45)$$

Essa divisão da integral mostra que o fator de desvio da difusividade  $w$  deve ser calculado com o respectivo período de tempo. Para o primeiro termo, o fator  $w$  tem que ser calculado baseado na  $p_{DV}$  do período de fluxo cuja solução é dada por

$$p_{DV}(r_D, t_D) = p_{DC}(r_D, t_D) \quad (5.46)$$

O segundo termo dever computado pela solução do período de crescimento de pressão.

$$p_{DV}(r_D, t_D) = p_{DC}(r_D, t_{pD} + \Delta t_D) - p_{DC}(r_D, \Delta t_D) + \quad (5.47)$$

### 5.3.2 Validação

Nesse caso serão consideradas as seguintes hipóteses:

- reservatório homogêneo isotrópico;
- reservatório de espessura constante;
- poço penetra completamente a espessura do reservatório;
- desconsiderados os efeitos não-Darcianos;

- a permeabilidade absoluta e a porosidade são independentes da pressão;

O conjunto de dados utilizados para testar a solução proposta é o mesmo utilizado para os modelos de vazão constante apresentados no Capítulo 4 (Figuras 4.2, 4.3 e 4.4). Outros dados de rocha e fluido são apresentados na Tabela 5.1.

Propriedade	Valor	Unidade
$k$	1	$mD$
$\phi$	0,1	—
$c_f$	0,000050	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$c_{gi}$	0,002513	$(kgf/cm^2)^{-1}$
$\mu_i$	0,021086	$cp$
$p_i$	300	$kgf/cm^2$
$p_{sc}$	1,03323	$kgf/cm^2$
$T_{sc}$	15,6	$^{\circ}C$
$T_{wf}$	60	$^{\circ}C$
$h$	40	$m$
$q_g$	400000	$m^3/dia$
$t_{pD}$	1000	—

Tabela 5.1: Teste de Crescimento de Pressão - Propriedades de Rocha e Fluido

Para validar a solução proposta nesse capítulo foi utilizado o mesmo modelo numérico radial que o da seção 4.1. Primeiramente são apresentados os resultados para o período de fluxo para a pseudo pressão adimensional  $m_D$  e para a derivada  $m'_D$  (Figura 5.2). Os resultados comparativos para o termo de primeira ordem  $m_{D1}$  são mostrados na figura 5.3. Os resultados mostram excelente concordância em ambas as curvas persistindo os problemas de discretização citados nos modelos anteriores.

Os resultados para o período de estática mostram que a solução proposta nesse trabalho reproduz o resultado esperado (Figura 5.4) A comparação do termo de primeira ordem  $m_{D1}$ , da solução geral proposta nesse trabalho e a gerada por diferenças finitas são mostrados na Figura 5.4. Após o fechamento do poço, o reservatório recupera a pressão (representada pela variável  $m_D$ ) e a derivada da pseudo pressão tende a zero, conforme esperado.

O gráfico de Horner (Figura 5.6) mostra a excelente concordância entre a solução aqui proposta e a simulação por diferenças finitas. O desvio em relação à solução do líquido se dá por causa da dependência da vazão na solução do gás [16, 17]. Finalmente, é mostrado o comportamento do termo não-linear de primeira ordem da pseudo-pressão ao longo de todo o tempo de teste (períodos de fluxo e estática) em um gráfico semi-log (Figura 5.7). É interessante notar o comportamento desse termo no instante do fechamento do poço, também reproduzido por simulação numérica.

## 5.4 Teste de Contra-Pressão

Nesse tipo de teste o poço é colocado em produção com uma vazão constante até que a pressão de fluxo se estabilize. A vazão, então, é alterada até que a pressão de fluxo se estabilize

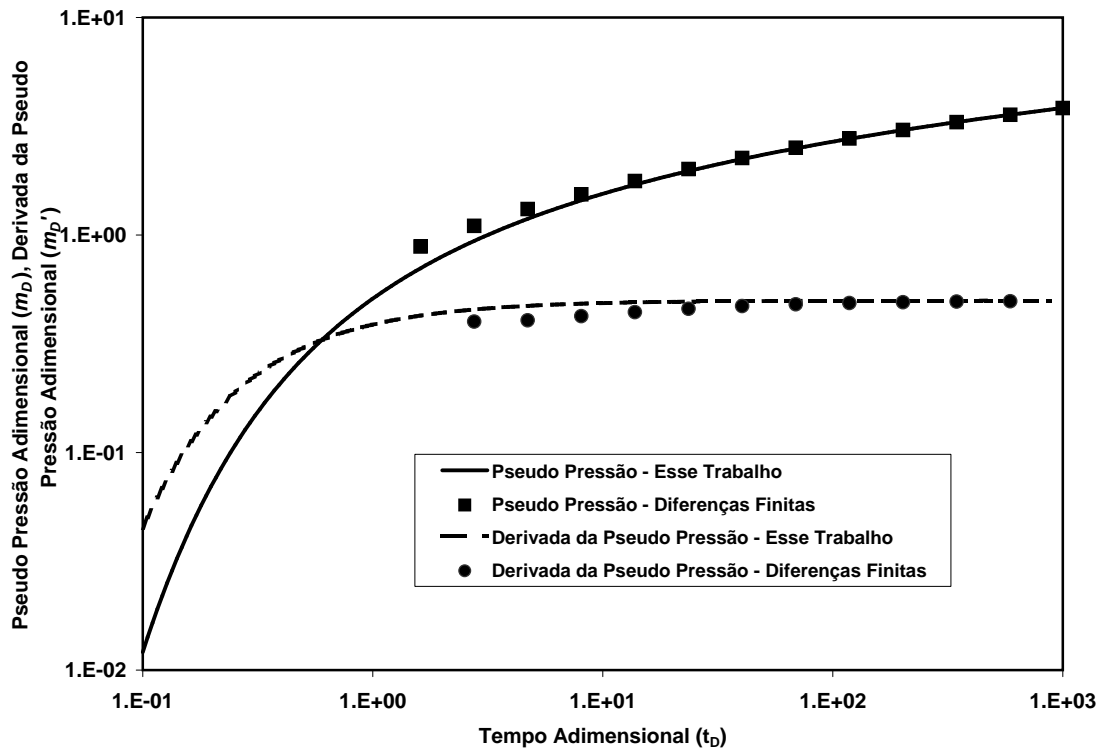


Figure 5.2: Teste de Crescimento de Pressão - Período de Fluxo

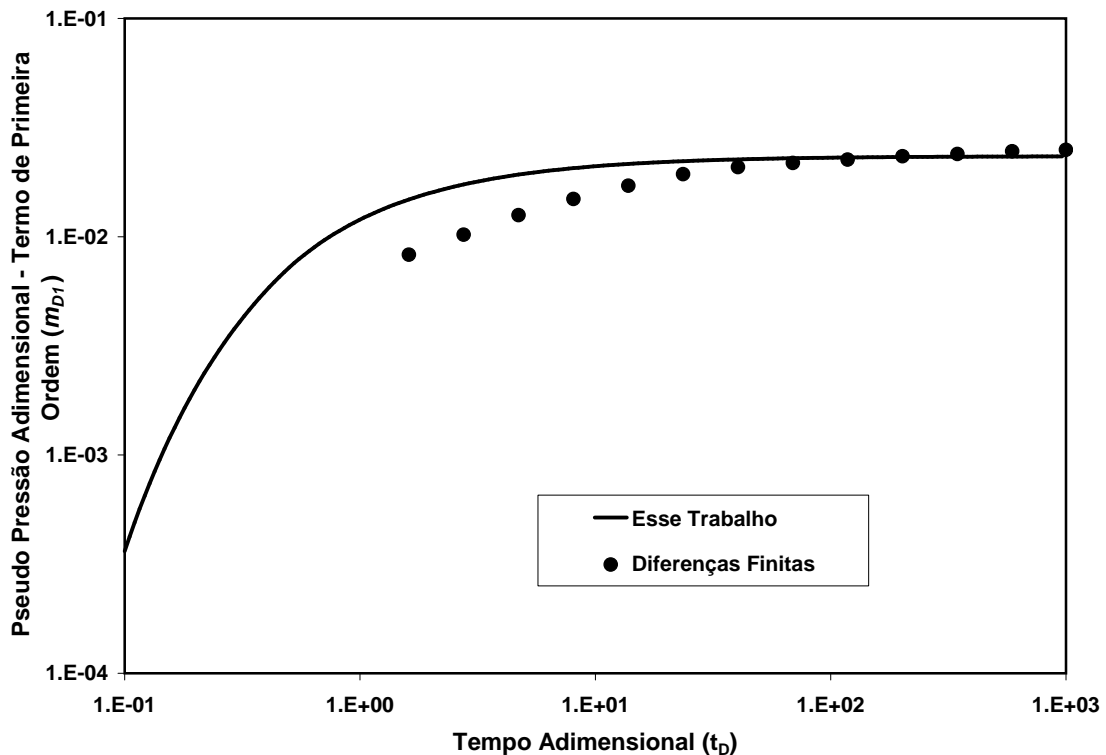


Figure 5.3: Teste de Crescimento de Pressão - Período de Fluxo

novamente. Normalmente esse procedimento se repete para três ou quatro diferentes vazões (Figura 5.8). Esse tipo de teste objetiva o cálculo da capacidade de produção de um reservatório de gás representado pelo *AOF* (*Absolute Open Flow*). Esse cálculo não é objeto desse trabalho

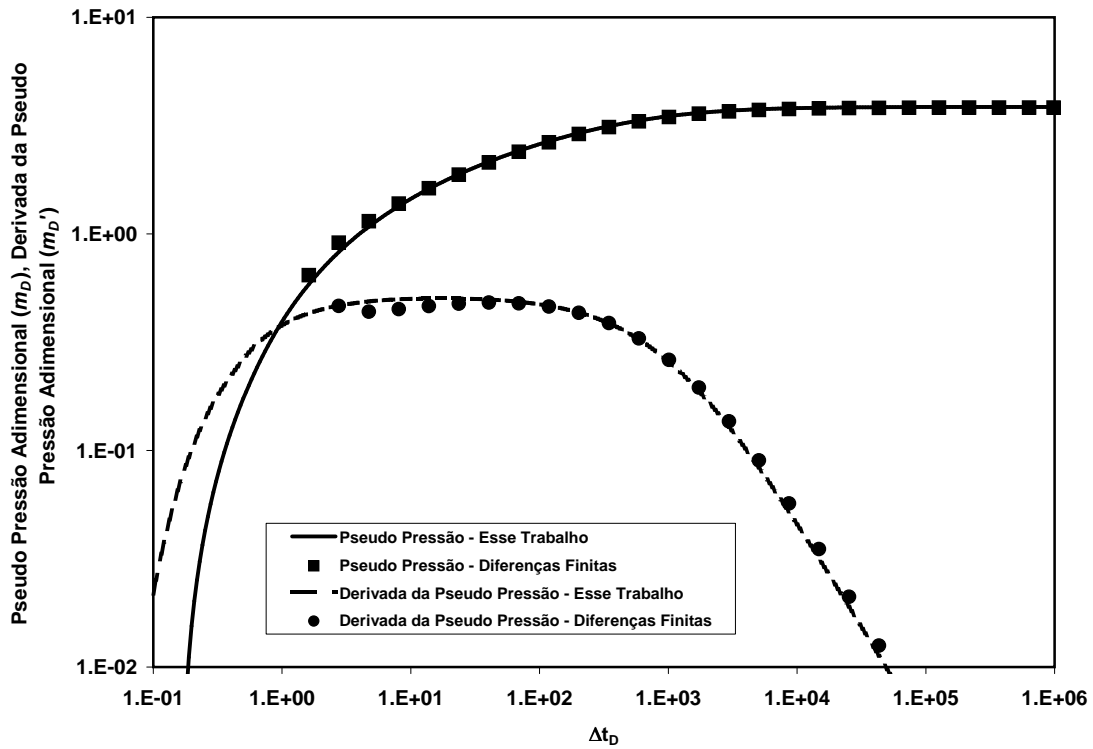


Figure 5.4: Teste de Crescimento de Pressão - Período de Estática

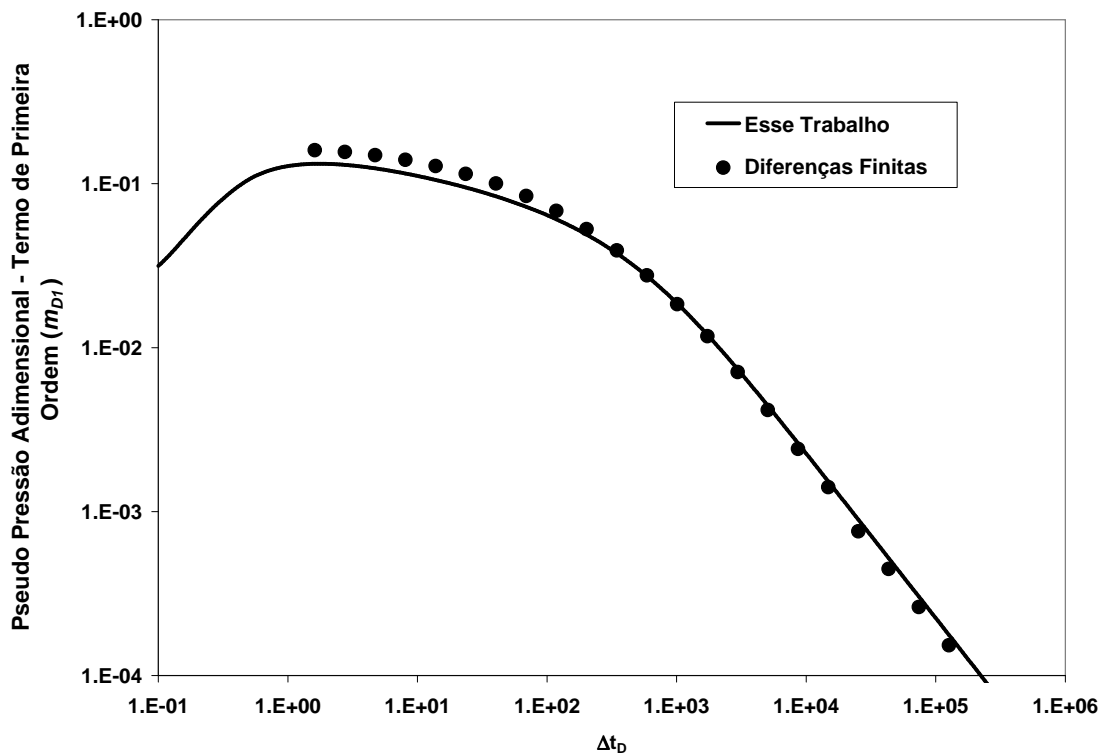


Figure 5.5: Teste de Crescimento de Pressão - Período de Estática

e sim o estabelecimento de uma solução mais precisa para uma melhor estimativa desse índice.



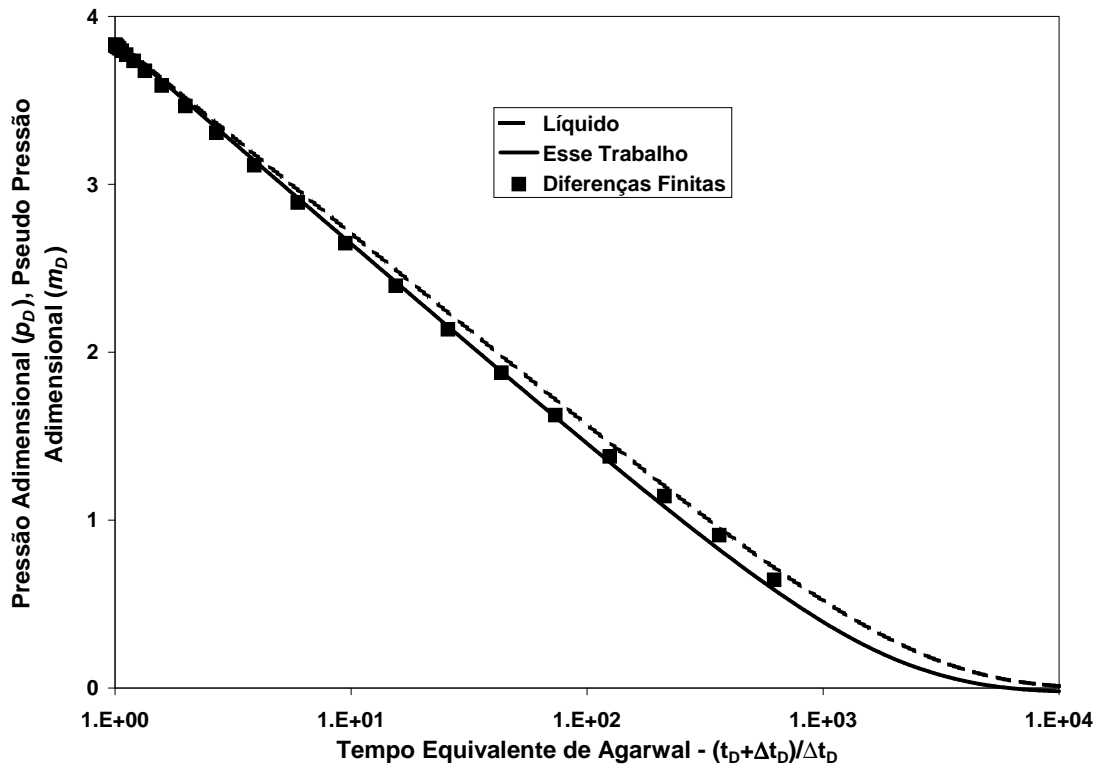


Figure 5.6: Teste de Crescimento de Pressão - Gráfico de Horner

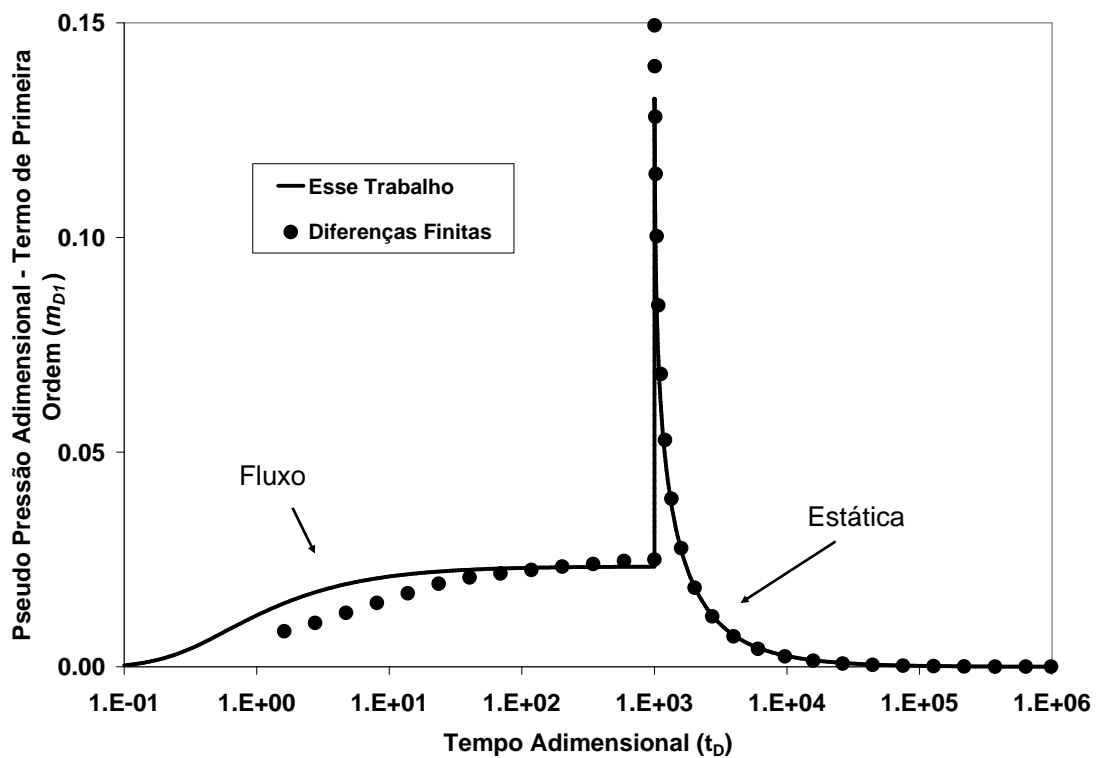


Figure 5.7: Teste de Crescimento de Pressão - Fluxo e Estática

### 5.4.1 Formulação Matemática

Definindo o seguinte esquema de vazão de gás

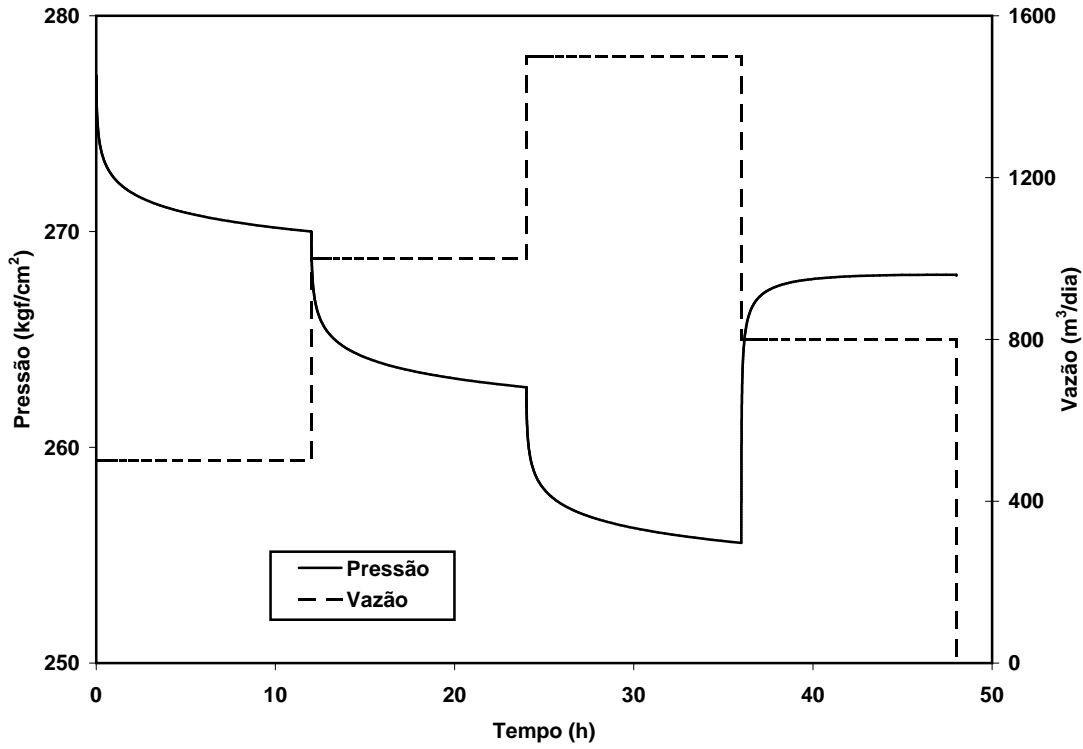


Figure 5.8: Esquema de um Teste de Contra-Pressão

$$q_{wD}(t_D) = \begin{cases} q_1 & , t_D < t_{pD1} \\ q_2 & , t_{pD1} < t_D < t_{pD2} \\ q_3 & , t_D > t_{pD2} \end{cases} \quad (5.48)$$

e substituindo 5.48 em 5.39 é possível obter

$$m_{DV}(r_D, t_D) = \int_0^{t_{pD1}} q_1 \frac{\partial p_{DC}(r_D, t_D - t'_D)}{\partial t_D} dt'_D + \int_{t_{pD1}}^{t_{pD2}} q_2 \frac{\partial p_{DC}(r_D, t_D - t'_D)}{\partial t_D} dt'_D + \\ + \int_{t_{pD2}}^{t_D} q_3 \frac{\partial p_{DC}(r_D, t_D - t'_D)}{\partial t_D} dt'_D + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (5.49)$$

Portanto

$$m_{DV}(r_D, t_D) = q_1 p_{DC}(r_D, t_D) + (q_2 - q_1) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD1}) + (q_3 - q_2) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD2}) + \\ + \int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D. \quad (5.50)$$

O termo  $\int_0^\infty \int_0^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D$  é equivalente ao desvio da solução de líquido devido a não-linearidade. Computacionalmente é interessante dividir a integral no tempo em

três termos. Assim, a equação 5.50 torna-se

$$\begin{aligned}
m_{DV}(r_D, t_D) = & q_1 p_{DC}(r_D, t_D) + (q_2 - q_1) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD1}) + (q_3 - q_2) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD2}) + \\
& + \int_0^\infty \int_0^{t_{pD1}} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \\
& + \int_0^\infty \int_{t_{pD1}}^{t_{pD2}} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \\
& + \int_0^\infty \int_{t_{pD2}}^{t_D} w \frac{\partial m_{DV}}{\partial t_D} G_D(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (5.51)
\end{aligned}$$

Da mesma forma que foi visto para o teste de crescimento de pressão a divisão da integral em três partes faz com que o cálculo do fator de desvio da difusividade  $w$  tem que ser feito para cada período de tempo. Para o primeiro trecho (de 0 a  $t_{pD1}$ ), o fator  $w$  tem que ser calculado baseado na  $p_{DV}$  do período de fluxo cuja solução é dada por

$$p_{DV}(r_D, t_D) = q_1 p_{DC}(r_D, t_D) \quad (5.52)$$

Para o segundo (de  $t_{pD1}$  a  $t_{pD2}$ ), o fator  $w$  é calculado baseado na  $p_{DV}$  cuja solução é

$$p_{DV}(r_D, t_D) = q_1 p_{DC}(r_D, t_D) + (q_2 - q_1) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD1}) \quad (5.53)$$

e finalmente, para o último termo da integral (de  $t_{pD2}$  a  $t_{pD3}$ ), o fator  $w$  é baseado na solução de  $p_{DV}$  dada por

$$p_{DV}(r_D, t_D) = q_1 p_{DC}(r_D, t_D) + (q_2 - q_1) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD1}) + (q_3 - q_2) p_{DC}(r_D, t_D - t_{pD2}) \quad (5.54)$$



# Chapter 6

## Conclusões

Nesse trabalho foi desenvolvida a solução analítica da equação não-linear que modela o escoamento do gás em um meio poroso. A solução foi obtida com a aplicação de funções de Green e é composta por um termo linear somado a uma série infinita de termos não lineares dependentes do fator de desvio da razão da difusividade adimensional e da derivada da solução da pseudo pressão adimensional em relação ao tempo. Essa técnica mostra que é possível linearizar a equação em todas as suas derivadas e que a solução obtida é exata. Foi mostrado, no entanto, que essa solução é computacionalmente inviável porque a cada passo de tempo é necessário conhecer a derivada da solução em todo o domínio.

Dessa forma desenvolveu-se uma solução aproximada baseada em uma expansão assintótica da série infinita combinada com funções de Green, truncada no termo de primeira ordem. Foi demonstrado que o termo não-linear de primeira ordem possui magnitude maior que a soma dos termos seguintes da série infinita quando comparada a solução auto-similar. Em relação a solução por simulação em diferenças finitas, a expressão proposta nesse trabalho mostrou ser muito precisa com uma excelente concordância.

Para todos os casos é demonstrado que os regimes de fluxo esperados, e caracterizados na derivada logarítmica da pseudo pressão, são reproduzidos. É mostrado também que a equação pode ser utilizada para determinação de propriedades do conjunto poço/reservatório.

A aplicação do princípio de Duhamel na solução da equação da difusividade do gás leva a um erro residual função do termo de difusividade adimensional ( $\eta_D$ ) como demonstrado para o caso de vazão variável. Esse erro mostra formalmente que tal princípio não pode ser aplicado a esse problema. A não-linearidade é devidamente tratada pela solução para vazão variável proposta nesse trabalho.

Essa técnica pode ser aplicada para outras configurações de poço/reservatório, tais como poços horizontais, direcionais, etc., com diferentes esquemas de vazão, bastando para isso determinar apropriadamente a respectiva função de Green ( $G_D$ ) de cada geometria e modelando corretamente o comportamento da difusividade adimensional ( $\eta_D$ ). Ela também pode ser estendida para outros problemas físicos não-lineares como por exemplo problemas de condução de calor.



# Appendix A

## Funções de Green em Problemas de Escoamento de Fluidos em Meios Porosos

Muitos problemas físicos podem ser formulados por meio de equações diferenciais parciais. Funções de Green é uma das técnicas utilizadas para resolver esse tipo de problema. Nesse apêndice iremos mostrar sua aplicabilidade e a dedução das funções de Green específicas para dois casos: escoamento transiente 1-D de extensão infinita com fonte de intensidade variável; e escoamento 2-D de um domínio de extensão infinita, na presença de uma barreira de fluxo, com fonte de intensidade constante  $\tilde{q}(x, y)$ , posicionada a uma distância  $L$  dessa barreira. Diversas publicações nas áreas de engenharia, física ou matemática apresentam as técnicas de solução de equações diferenciais por Funções de Green [31, 30, 35, 36].

### A.1 Identidade de Lagrange e Fórmula de Green

Definindo um o seguinte operador linear

$$L(\cdot) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right] + q(x)(\cdot), \quad (\text{A.1})$$

ou simplificadamente,

$$L = \frac{d}{dx} \left[ p \frac{d}{dx} \right] + q, \quad (\text{A.2})$$

e aplicando este operador em uma função qualquer  $y(x)$ , temos

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y. \quad (\text{A.3})$$

Calculando a expressão  $uL(v) - vL(u)$  para duas funções  $u(x)$  e  $v(x)$

$$uL(v) = u \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dv}{dx} \right] + uq(x)v \quad (\text{A.4})$$

e

$$vL(u) = v \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + vq(x)u, \quad (\text{A.5})$$

então

$$uL(v) - vL(u) = u \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dv}{dx} \right] - v \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right], \quad (\text{A.6})$$

ou

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right], \quad (\text{A.7})$$

que é conhecida como a *Identidade de Lagrange*. Integrando a equação A.7 e usando o teorema fundamental do cálculo,

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx' = \left[ p(x) \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b, \quad (\text{A.8})$$

obtemos a *Fórmula de Green*.

Se ao invés de considerar duas funções arbitrárias for imposta a condição de que  $u$  e  $v$  satisfaçam o mesmo conjunto de condições de contorno homogêneas, então a equação A.8 torna-se

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx' = 0 \quad (\text{A.9})$$

Considere o problema do caso 1-D infinito com fonte de intensidade variável  $\tilde{q}(x, t)$ . Matematicamente é equivalente a

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\mu}{k} \tilde{q}(x, t) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}, \quad (\text{A.10})$$

com condição inicial

$$\Delta p(x, t = 0) = 0, \quad (\text{A.11})$$

e condição de contorno externa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Delta p(x, t) = 0. \quad (\text{A.12})$$

O objetivo é encontrar a solução geral de A.10-A.12, isto é, obter a solução para uma fonte genérica  $\tilde{q}(x, t)$ . Redefinindo o termo-fonte:

$$\hat{q}(x, t) = \frac{\tilde{q}(x, t)}{\phi c_t}. \quad (\text{A.13})$$

tendo  $\tilde{q}(x, t)$  dimensão de  $[Tempo]^{-1}$ , resulta que  $\hat{q}(x, t)$  tem dimensão  $[pressão] \cdot [Tempo]^{-1}$ . O termo fonte  $\hat{q}(x, t)$  pode ser entendido como uma variação na pressão associada à extração instantânea de um volume  $Q$  no tempo  $t$  e na posição  $x$ . Usando A.13 em A.10



$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{\hat{q}(x, t)}{\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (\text{A.14})$$

A solução da equação diferencial parcial não-homogênea A.14 sujeita a condição inicial e condições de contorno homogêneas (equações A.11-A.12) pode ser encontrada através de uma outra equação diferencial associada:

$$\frac{\partial^2 G(x, x_0, t, t_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial G(x, x_0, t, t_0)}{\partial t} = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), \quad (\text{A.15})$$

com condição inicial

$$G(x, x_0, t = 0, t_0) = 0, \quad (\text{A.16})$$

e condição de contorno externa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x, x_0, t, t_0) = 0, \quad (\text{A.17})$$

onde  $\delta(x - x_0)$  e  $\delta(t - t_0)$  são funções delta de Dirac na posição  $x = x_0$  e  $t = t_0$ , definidas por

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } x \neq x_0 \\ \infty & \text{para } x = x_0 \end{cases}, \quad (\text{A.18})$$

e

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } t \neq t_0 \\ \infty & \text{para } t = t_0 \end{cases}. \quad (\text{A.19})$$

e  $G(x, x_0, t, t_0)$  é a função de Green para a equação A.14. Para simplificar, considere que a fonte está posicionada em  $x_0 = 0$  e inicia a produção em  $t_0 = 0$ . Neste caso

$$\delta(x - x_0) \delta(t - t_0) = \delta(x - 0) \delta(t - 0) = \delta(x) \delta(t). \quad (\text{A.20})$$

Aplicando a transformada de Laplace em relação ao tempo nos problemas (A.10-A.12 e A.15-A.17), encontramos

$$\frac{d^2 \bar{\Delta p}}{dx^2} - \frac{1}{\eta} (u \bar{\Delta p} - \Delta p(x, t = 0)) = \frac{\bar{\hat{q}}(x, u)}{\eta}, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d^2 \bar{\Delta p}}{dx^2} - \frac{1}{\eta} u \bar{\Delta p} = \frac{\bar{\hat{q}}(x, u)}{\eta}, \quad (\text{A.22})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{\Delta p}(x, u) = 0, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dx^2} - \frac{1}{\eta} (u \bar{G} - G(x, x_0, t = 0, 0)) = \mathcal{L} \{ \delta(x) \delta(t) \} = \delta(x) \mathcal{L} \{ \delta(t) \} = \delta(x), \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dx^2} - \frac{1}{\eta} u \bar{G} = \delta(x), \quad (\text{A.25})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{G}(x, 0, u) = 0. \quad (\text{A.26})$$

Note que o operador linear nas equações A.22 e A.25 é do tipo

$$L(\cdot) = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right] + q(x) (\cdot), \quad (\text{A.27})$$

com  $p(x) = 1$  e  $q(x) = -\frac{u}{\eta} = cte$  para todo  $x$ . Como  $\bar{\Delta}p$  e  $\bar{G}$  satisfazem as mesmas condições de contorno homogêneas, aplica-se a identidade de Lagrange para chegar a solução da equação A.22:

$$\bar{\Delta}p(x, u) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(x', u) \bar{G}(x, x', u) dx'. \quad (\text{A.28})$$

A equação A.28 é a solução para  $\Delta p$  no espaço de Laplace a partir da função de Green. Aplicando a inversa da transformada de Laplace na equação A.28 temos

$$\Delta p(x, t) = \frac{1}{\eta} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(x', u) \bar{G}(x, x', u) dx' \right\} = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{q}(x', u) \bar{G}(x, x', u) \} dx' \quad (\text{A.29})$$

Pela propriedade da convolução da transformada de Laplace dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{f}(u) \bar{g}(u) \} = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.30})$$

resulta em

$$\Delta p(x, t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \hat{q}(x', \tau) G(x, x', t - \tau) d\tau dx' \quad (\text{A.31})$$

que é a solução da equação A.14 no campo real.

### A Função de Green do Problema A.15-A.17

No espaço de Laplace temos

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dx^2} - \frac{u}{\eta} \bar{G} = \delta(x), \quad (\text{A.32})$$

com condição de contorno externa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \bar{G}(x, x_0 = 0, u) = 0. \quad (\text{A.33})$$

A equação diferencial ordinária não-homogênea A.32 pode ser resolvida pelo método de variação de parâmetros [37]:

$$\bar{G} = \bar{G}_C + \bar{G}_P, \quad (\text{A.34})$$

onde  $\bar{G}_C \equiv$  solução da EDO homogênea associada,

$$\bar{G}_C = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad c_1, c_2 = \text{ctes}, \quad (\text{A.35})$$

e  $\bar{G}_P \equiv$  solução particular, dada por

$$\bar{G}_P = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x), \quad (\text{A.36})$$

onde

$$v_1(x) = - \int_{a_1}^x \frac{y_2(x') g(x')}{W(y_1, y_2)|_{x'}} dx' + B_1, \quad (\text{A.37})$$

e

$$v_2(x) = \int_{a_2}^x \frac{y_1(x') g(x')}{W(y_1, y_2)|_{x'}} dx' + B_2, \quad (\text{A.38})$$

sendo  $g(x)$  o termo fonte da equação diferencial parcial não-homogênea e  $W$  é o Wronskiano, definido como

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2. \quad (\text{A.39})$$

As soluções  $y_1$  e  $y_2$  da EDO homogênea são

$$y_1(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}} x\right), \quad (\text{A.40})$$

e

$$y_2(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}} x\right), \quad (\text{A.41})$$

com derivadas

$$y_1'(x) = \sqrt{\frac{u}{\eta}} y_1, \quad (\text{A.42})$$

e

$$y_2'(x) = -\sqrt{\frac{u}{\eta}} y_2. \quad (\text{A.43})$$

Assim, o Wronskiano torna-se

$$W(y_1, y_2) = -\sqrt{\frac{u}{\eta}}y_1y_2 - \sqrt{\frac{u}{\eta}}y_1y_2 = -2\sqrt{\frac{u}{\eta}}, \quad (\text{A.44})$$

que é independente de  $x$ .

### Determinação das soluções $v_1(x)$ e $v_2(x)$

Vamos calcular  $v_1(x)$  e  $v_2(x)$  com os limites inferiores de integração  $a_1 = a_2 = \lim_{a \rightarrow -\infty} a$ . Como  $g(x) \equiv \delta(x)$

$$v_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}x'\right) \delta(x' - 0) dx' + B_1, \quad (\text{A.45})$$

é necessário considerar dois casos:  $x > 0$  e  $x < 0$ . Usando a propriedade de amostragem da função  $\delta$  o resultado do primeira função é

$$v_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}} \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}} \cdot 0\right) + B_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}} + B_1, \quad p/x > 0, \quad (\text{A.46})$$

$$v_1(x) = B_1, \quad p/x < 0. \quad (\text{A.47})$$

Similarmente,

$$v_2(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}} + B_2, \quad p/x > 0, \quad (\text{A.48})$$

$$v_2(x) = B_2, \quad p/x < 0. \quad (\text{A.49})$$

Usando os resultados na equação A.36

$$\bar{G}_P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{u}} \{y_1(x) - y_2(x)\} + B_1y_1(x) + B_2y_2(x) \quad p/x > 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\bar{G}_P = B_1y_1(x) + B_2y_2(x) \quad p/x < 0. \quad (\text{A.51})$$

### Determinação das constantes $B_1$ e $B_2$

Nesse caso, como a EDO homogênea associada tem condições de contorno homogêneas, a solução  $\bar{G}_C$  é zero, então

$$\bar{G} = \bar{G}_P. \quad (\text{A.52})$$

Aplicando as condições de contorno (equação A.33) para determinar as constantes  $B_1$  e  $B_2$ . Para  $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{G}(x, x_0 = 0, u) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ B_1 \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) + B_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \right\} = 0. \quad (\text{A.53})$$

Então,  $B_2 = 0$ . Para  $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x, x_0 = 0, u) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \left\{ \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \right\} + B_1 \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \right\} = 0, \quad (\text{A.54})$$

$$\left\{ B_1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \right\} = 0. \quad (\text{A.55})$$

Portanto  $B_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}}$ . A solução para  $\bar{G}$  é dada por

$$\bar{G}(x, x_0 = 0, u) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \quad p/x > 0, \quad (\text{A.56})$$

$$\bar{G}(x, x_0 = 0, u) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) \quad p/x < 0. \quad (\text{A.57})$$

Usando a função degrau unitário

$$U_k = \begin{cases} 0 & p/x < k \\ 1 & p/x > k \end{cases}, \quad (\text{A.58})$$

a solução pode ser escrita como

$$\bar{G}(x, x_0 = 0, u) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \left\{ \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) U_{x=0} + \exp\left(\sqrt{\frac{u}{\eta}}x\right) (1 - U_{x=0}) \right\}, \quad p/-\infty < x < \infty. \quad (\text{A.59})$$

Esse resultado também pode ser colocado na forma

$$\bar{G}(x, x_0 = 0, u) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{u}} \exp\left(-\sqrt{\frac{u}{\eta}}|x|\right) \quad p/-\infty < x < \infty. \quad (\text{A.60})$$

### A função de Green no campo real

Para determinar a função de Green no campo real basta aplicar a transformada de Laplace inversa em uma das formas em que as soluções foram apresentadas na seção anterior. Aplicando a seguinte transformação [32]

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u}} \exp(-k\sqrt{u}) \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) \quad p/k \geq 0, \quad (\text{A.61})$$

à equação A.60, temos a equivalência

$$k \equiv \frac{|x|}{\sqrt{\eta}}, \quad (\text{A.62})$$

e assim,

$$G(x, x_0 = 0, t) = -\eta \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta t}\right) \right\}. \quad (\text{A.63})$$

O termo entre chaves tem dimensão  $[L]^{-1}$ , e representa a resposta para uma adição (injeção) instantânea de um volume de fluido na posição  $x = 0$  no tempo  $t = 0$ .

### Solução para $\Delta p(x, t)$

Para calcular a solução para  $\Delta p(x, t)$  para uma dada vazão  $\hat{q}(x, t)$  basta superpor os efeitos no espaço e tempo de acordo com a equação A.31:

$$\Delta p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t -\hat{q}(x', \tau) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\eta(t-\tau)}\right) \right\} d\tau dx'. \quad (\text{A.64})$$

Mas  $\hat{q}(x, t) = \frac{\tilde{q}(x, t)}{\phi c_t}$ , então

$$\Delta p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t -\frac{\tilde{q}(x', \tau)}{\phi c_t} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\eta(t-\tau)}\right) \right\} d\tau dx'. \quad (\text{A.65})$$

Considerando o caso do regime transiente 2-D em um domínio de extensão infinita, na presença de uma barreira de fluxo, com fonte de intensidade constante  $\tilde{q}(x, y)$ , posicionada a uma distância  $L$  ao longo da direção  $x$ , de uma falha selante (Figura A.1), a representação matemática é feita por uma barreira de fluxo nulo em função da criação de um poço-imagem a mesma distância  $L$  da falha.

A função de Green para esse tipo de geometria, com dois termos-fontes, com a origem do sistema de coordenadas ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) posicionado no poço real, é dada por

$$G(x, x_0 = 0, y, y_0 = 0, t) = \frac{1}{4\pi\eta t} \left\{ \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\eta t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-2L)^2 + y^2}{4\eta t}\right) \right\}, \quad (\text{A.66})$$

e a solução para  $\Delta p(x, y, t)$ ,

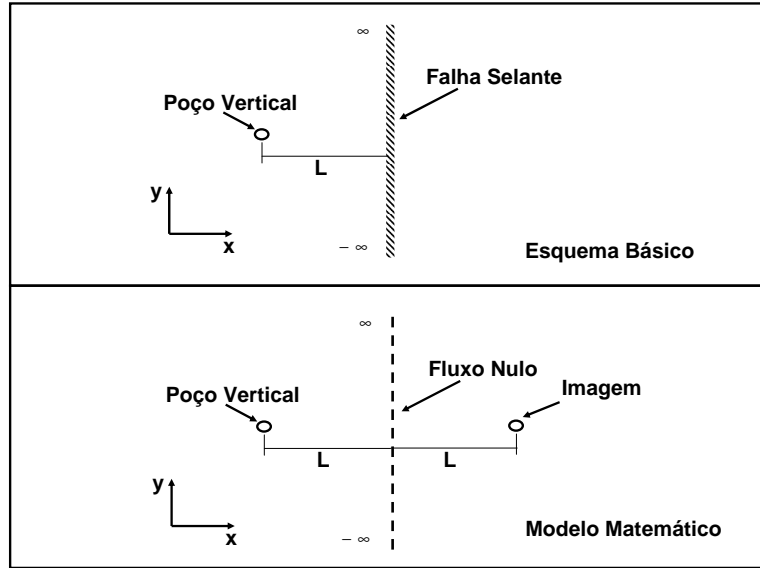


Figura A.1: Determinação da Função de Green - Poço Próximo à Falha Selante

$$\Delta p(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t -\frac{\tilde{q}(0, 0)}{\phi c_t} \left\{ \frac{1}{4\pi\eta t} \left[ \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\eta(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x-2L-x')^2 + (y-y')^2}{4\eta(t-\tau)}\right) \right] \right\} d\tau dx' dy'. \quad (A.67)$$





# Appendix B

## Aspectos Computacionais

Neste apêndice serão discutidos os aspectos computacionais mais relevantes deste trabalho. Foi utilizado um pacote de integração numérica multidimensional desenvolvido no CERN chamado de CUBA [28, 29].

### B.1 Características

A biblioteca CUBA auxilia no cálculo de integrais da forma:

$$\text{Integral}(f) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{B.1})$$

Para limites de integração diferentes, a seguinte transformação é aplicada

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) dy_1 dy_2 \dots dy_n \quad (\text{B.2})$$

onde:

$$x_i = a_i + (b_i - a_i) y_i \quad (\text{B.3})$$

Por exemplo,

- Para calcular a expressão

$$\int_0^{10} \exp(x) dx = \exp(10) - \exp(0) \quad (\text{B.4})$$

a partir de B.2 e B.3,

$$x = 0 + (10 - 0) y = 10y \quad (\text{B.5})$$

$$\int_0^{10} \exp(x) dx = \int_0^1 \exp(10y) \prod_{i=1}^1 (10 - 0) dy \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^1 \exp(10y) \prod_{i=1}^1 (10 - 0) dy = 10 \int_0^1 \exp(10y) dy \quad (\text{B.7})$$

$$10 \int_0^1 \exp(10y) dy = 10 \frac{(\exp(10) - \exp(0))}{10} = \exp(10) - \exp(0) \quad (\text{B.8})$$

- No caso do escoamento de um fluido pouco compressível em uma fratura finita em um reservatório de extensão infinita, a solução é dada por:

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = 2 \int_0^{t_D} \int_{-1}^1 G_{xD}(x_D, x'_D, t_D, t'_D) G_{yD}(y_D, 0, t_D, t'_D) dx'_D dy'_D dt'_D \quad (\text{B.9})$$

$$G_{xD}(x_D, x'_D, t_D, t'_D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_D - t'_D)}} \exp\left(-\frac{(x_D - x'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) \quad (\text{B.10})$$

$$G_{xD}(y_D, 0, t_D, t'_D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_D - t'_D)}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) \quad (\text{B.11})$$

A solução fica

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = \int_0^1 \int_0^1 2G_{xDT}(x_D, x'_{DT}, t_D, t'_{DT}) G_{yDT}(y_D, 0, t_D, t'_{DT}) \times \\ \times [(t_D - 0)(1 - (-1))] dx'_{DT} dy'_{DT} dt'_{DT} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$x'_D = -1 + (1 - (-1)) x'_{DT} = x'_{DT} \quad (\text{B.13})$$

$$t'_D = 0 + (t_D - 0) t'_{DT} = t_D t'_{DT} \quad (\text{B.14})$$

$$G_{xDT}(x_D, x'_{DT}, t_D, t'_{DT}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_D - t_D t'_{DT})}} \exp\left(-\frac{(x_D - 2x'_{DT} + 1)^2}{4(t_D - t_D t'_{DT})}\right) \quad (\text{B.15})$$

$$G_{xD}(y_D, 0, t_D, t'_{DT}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_D - t_D t'_{DT})}} \exp\left(-\frac{y_D^2}{4(t_D - t_D t'_{DT})}\right) \quad (\text{B.16})$$

Substituindo as equações de B.13 a B.16 em B.12 e fazendo as devidas simplificações, torna-se:

$$\frac{1}{\pi(1 - t'_{DT})} \exp\left(-\frac{(x_D - 2x'_{DT} + 1)^2 + y_D^2}{4(t_D - t_D t'_{DT})}\right), \quad (\text{B.17})$$

uma função no programa que utilizará um dos algoritmos de integração a biblioteca CUBA.

Essa biblioteca provê quatro algoritmos para integração numérica: Vegas, SUAVE, Divonne e Cuhre. Os três primeiros são baseados em métodos de Monte Carlo e o último deles é determinístico. Esses algoritmos tem interfaces (chamadas de subrotina) nos ambientes C/C++, Fortran e Mathematica e a chamada em cada ambiente é semelhante [28, 29].

Vegas, o mais simples dos quatro algoritmos, usa uma amostragem que reduz a variância dos dados e constrói uma função-peso representada por uma malha retangular. Em cada iteração uma nova amostragem é feita seguida de um refinamento da malha. O ponto fraco desse algoritmo está no fato de utilizar funções-peso independentes. Aparentemente a melhor resposta de Vegas é dependente do alinhamento das regiões características da função integrando com os eixos coordenados.

SUAVE (*SUBregion-Adaptative VEGas*) usa o mesmo tipo de amostragem que o Vegas combinado com uma estratégia de subdivisão global adaptativa das regiões destinadas às funções-peso. Divonne usa amostragem estratificada para redução da variância, isto é, divide a o domínio de integração de tal forma que todas as subregiões tenham quase o mesmo número de amostras. Cuhre é um algoritmo determinístico que usa uma das muitas regras de quadratura polinomial.

Um teste foi feito para avaliar os quatro algoritmos e aquele se mostrou mais estável aplicado ao nosso problema foi o Vegas.

## B.2 Instalação

### B.2.1 Instalação do CUBA

Para instalar a biblioteca de integração numérica CUBA basta baixar o arquivo Cuba-1.6.tar.gz do endereço <http://www.feynarts.de/cuba>. Ao descomprimir esse arquivo uma série de diretórios será criada: demo, src e tools. A biblioteca deverá ser compilada com o gcc (compilador C do gnu - software livre). Se o ambiente de trabalho padrão for o Windows, será necessária a instalação de um emulador LINUX, o cygwin.

### B.2.2 Instalação do Cygwin

1. Estar conectado a internet todo o tempo
2. Baixar o <http://www.cygwin.com/setup.exe>
3. Rodar o setup.exe
4. Escolher “Install from Internet”
5. Deixar o *root directory* como “C:\cygwin” e mudar o *local package* para “C:\cygwin\downloads”
6. No menu *select internet connection*, escolher “Use IES Settings”

7. Aparecerá a lista de *sites* para *download*. Um bom *site* é o <http://mirrors.kernel.org>. É rápido e estável.
8. Aparecerá então uma lista de pacotes. Além do pacote *default*, buscar e instalar os seguintes pacotes:
  - (a) Para compilação de programas em C: Buscar *gcc* -> Abrir *Devel* -> Selecionar *gcc-core*, *gcc-g++*
  - (b) Para compilação de programas em FORTRAN: Selecionar também *gcc-g77* (além dos outros dois anteriores)
  - (c) Buscar *make* -> Abrir *Devel* -> Selecionar *make*
9. A partir daí basta avançar até o final da instalação.
10. Um ícone do cygwin será criado na área de trabalho de seu computador

### B.2.3 Observações Finais

A biblioteca de integração numérica CUBA disponibiliza um programa demonstrativo para testes com funções de múltiplas variáveis. Esse programa pode ser compilado em diferentes sistemas operacionais mas a base de desenvolvimento da biblioteca foi o sistema operacional LINUX. O cygwin funciona no windows como um emulador desse sistema operacional. Assim sendo para compilar o programa *demo.c* nesse ambiente siga os seguintes passos:

1. Clique no ícone do cygwin e assim abrirá um console
2. Dê o comando `cd/cygdrive/<unidade c: d: etc>/<dir do projeto>`
3. Dê o comando `./configure` e em seguida `./make`
4. Um executável *demo.exe* será criado e estará pronto para uso.

# Referências Bibliográficas

- [1] L. Jones, “An approximate method for computing nonsteady-state flow of gases in porous media,” *SPE Journal*, vol. 1, pp. 264–276, December 1961, SPE Paper 109.
- [2] R. D. Carter, S. C. Miller Jr., and H. G. Riley, “Determination of stabilized gas well performance from short flow tests,” *Journal of Petroleum Technology*, vol. 15, pp. 651–658, June 1963, SPE Paper 400.
- [3] G. Rowan and M. W. Clegg, “An approximate method for non-darcy radial gas flow,” *SPE Journal*, vol. 4, pp. 96–114, June 1964, SPE Paper 687-PA.
- [4] P. Dranchuk, K. Aziz, and D. Flock, “Prediction of gas well behavior by the application of unsteady state flow theory to pressure drawdown test data,” *included in the eLibrary with the permission of and transfer of copyright from the author*, pp. 264–276, December 1963, SPE Paper 775.
- [5] H. J. Ramey Jr., “Non-darcy flow and wellbore storage effects in pressure buildup and drawdown of gas wells,” *Journal of Petroleum Technology*, vol. 17, pp. 223–233, February 1965, SPE Paper 1058-PA.
- [6] R. Al-Hussainy, H. J. Ramey Jr., and P. B. Crawford, “The flow of real gases through porous media,” *Journal of Petroleum Technology*, pp. 624–636, May 1966, SPE Paper 1243A.
- [7] R. Al-Hussainy and H. J. Ramey Jr., “Application of real gas flow theory to well testing and deliverability forecasting,” *Journal of Petroleum Technology*, vol. 18, pp. 637–642, May 1966, SPE Paper 1243B.
- [8] R. A. Wattenbarger and H. J. Ramey Jr., “Gas well testing with turbulence, damage and wellbore storage,” *Journal of Petroleum Technology*, vol. 20, pp. 877–887, August 1968, SPE Paper 1835.
- [9] R. G. Agarwal, “Real gas pseudo-time - a new function for pressure buildup analysis of mhfg gas wells,” Proceedings of SPE 54th Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, Nevada, 1979, SPE Paper 8279.

- [10] W. J. Lee and S. A. Holditch, "Application of pseudotime to buildup test analysis of low-permeability gas wells with long-duration wellbore storage distortion," *Journal of Petroleum Technology*, vol. 34, pp. 2877–2887, December 1982, SPE Paper 9888.
- [11] J. Finjord, "An analytical study of pseudotime for pressure drawdown in a gas reservoir," *SPE Formation Evaluation*, vol. 4, pp. 287–292, June 1989, SPE Paper 15205.
- [12] A. C. Reynolds, R. B. Bratvold, and W. Ding, "Semilog analysis of gas well drawdown and buildup data," *SPE Formation Evaluation*, vol. 2, pp. 657–670, December 1987, SPE Paper 13664.
- [13] L. Mattar and K. O. Adegbesan, "Prediction of pressure drawdown in gas reservoirs using a semi-analytical solution of the non-linear gas flow equation," Annual Technical Meeting , Calgary, Alberta, 1980, PETSOC 80-31-39.
- [14] D. Kale and L. Mattar, "Solution of a non-linear gas flow equation by the perturbation technique," *Journal of Canadian Petroleum Technology*, vol. 19, pp. 63–67, October-December 1980, PETSOC 80-04-06.
- [15] T. Mireles and T. A. Blasingame, "Application of convolution theory for solving non-linear flow problems: Gas flow systems," Proceedings of SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, 2003, SPE Paper 84073.
- [16] A. M. M. Peres, K. V. Serra, and A. C. Reynolds, "Toward a unified theory of well testing for nonlinear-radial-flow problems with application to interference tests," *SPE Formation Evaluation*, vol. 5, pp. 151–160, June 1990, SPE Paper 18113.
- [17] A. M. M. Peres, K. V. Serra, and A. C. Reynolds, "Supplement to spe 18113, toward a unified theory of well testing for nonlinear-radial-flow problems with application to interference tests," *included in the eLibrary with the permission of and transfer of copyright from the author*, June 1990, SPE Paper 20402.
- [18] L. Thompson and A. Reynolds, "Analysis of variable-rate well-test pressure data using duhamel's principle," *SPE Formation Evaluation*, vol. 1, pp. 453–469, October 1986, SPE Paper 13080.
- [19] E. B. Brauer, "Simplification of the superposition principle for pressure analysis at variable rates," Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Denver, Colorado, 1965, SPE Paper 1184.
- [20] K. C. Gupta and R. L. Andsage, "Application of variable rate analysis technique to gas wells," Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, New Orleans, Louisiana, 1967, SPE Paper 1836.

- [21] F. S. V. and H. Cinco-Ley, “Transient pressure analysis for variable rate testing of gas wells,” Low Permeability Reservoirs Symposium, Denver, Colorado, 1991, SPE Paper 21831.
- [22] T. von Schroeter and A. C. Gringarten, “Superposition principle and reciprocity for pressure transient analysis of data from interfering wells,” *SPE Journal*, vol. 14, pp. 488–495, September 2009, SPE Paper 110465.
- [23] A. C. Gringarten and H. J. Ramey Jr., “A comparison of different solutions to the radial flow problem,” *included in the eLibrary with the permission of and transfer of copyright from the author*, 1972, SPE Paper 3817.
- [24] A. C. Gringarten and H. J. Ramey Jr., “Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture,” *SPE Journal*, vol. 14, pp. 347–360, August 1974, SPE Paper 4051.
- [25] A. C. Gringarten and H. J. Ramey Jr., “An approximate infinite conductivity solution for a partially penetrating line-source well,” *SPE Journal*, vol. 15, pp. 140–148, April 1975, SPE Paper 4733.
- [26] A. C. Gringarten and H. J. Ramey Jr., “Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single horizontal fracture, partial penetration, or restricted entry,” *SPE Journal*, vol. 14, pp. 413–426, August 1974, SPE Paper 3819.
- [27] E. Ozkan, “Applied mathematics of fluid flow in porous media,” notas de aula, Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo- LENEP, 2008.
- [28] T. Hahn, “Cuba - a library for multidimensional numerical integration,” *Computer Physics Communications*, vol. 168, pp. 78–95, June 2005.
- [29] T. Hahn, “Cuba - a library for multidimensional numerical integration,” report, Max-Planck-Institut für Physik (disponível para download em <http://cdsweb.cern.ch/record/728672>), 2005.
- [30] J. V. Beck, K. D. Cole, A. Haji-Sheikh, and B. Litkouhi, *Heat Conduction Using Green's Functions*. Philadelphia: Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- [31] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. New York: Oxford Science Publications, 1959.
- [32] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1972.
- [33] D. Bourdet, *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. Amsterdam: Elsevier Science, 2002.

- 
- [34] M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*. São Paulo: Makron Books, 1992.
- [35] E. Butkov, *Física Matemática*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1988.
- [36] A. M. M. Peres, “Testes em poços de petróleo avançado,” notas de aula, Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo- LENEPE, 2008.
- [37] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.