

MODELAGEM DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELÁSTICAS EM  
MEIOS POROSOS 1D: MODELO DE BIOT-JKD

IGOR BARBOSA DE OLIVEIRA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE  
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ  
DEZEMBRO - 2015

# MODELAGEM DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELÁSTICAS EM MEIOS POROSOS 1D: MODELO DE BIOT-JKD

IGOR BARBOSA DE OLIVEIRA

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Orientador: Viatcheslav Ivanovich Priimenko, Ph.D.

MACAÉ - RJ  
DEZEMBRO - 2015

# MODELAGEM DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELÁSTICAS EM MEIOS POROSOS 1D: MODELO DE BIOT-JKD

IGOR BARBOSA DE OLIVEIRA

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Aprovada em 18 de Dezembro de 2015.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Marco Antônio Rodrigues de Ceia (D.Sc, Engenharia de Reservatório e Exploração) - LENEP/CCT/UENF

---

Prof. Sérgio Adriano Moura Oliveira (D.Sc, Geofísica) - LENEP/CCT/UENF

---

Prof. Viatcheslav Ivanovich Priimenko (Ph.D, Física-Matemática) -  
LENEP/CCT/UENF - (Orientador)

Igor Barbosa de Oliveira nasceu em 15 de abril de 1993, na cidade de Barão de Monte Alto, no estado de Minas Gerais.

Desde criança, se dedicava aos estudos influenciado por sua mãe (professora de filosofia e sociologia e supervisora escolar). Ainda menino, adorava ir ao sítio de seu pai e fazer cavalgadas.

Estudou na escola pública municipal “Professora Olívia Maria Coelho” até a 4ª série do Ensino Fundamental e da 5ª a 7ª série na escola pública estadual “Professor Tomás Aquino Pereira”, ambas localizadas em sua cidade natal.

No ano de 2006, recebeu o Certificado de Menção Honrosa, atribuído pelos Ministérios da Educação e da Ciência e Tecnologia, pelo seu desempenho na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Em 2007, foi aprovado em 1º lugar no “bolsão” da “Escola São Paulo”, instituição de ensino privada localizada na cidade de Muriaé/MG, onde cursou a 8ª série do Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

No ano de 2008, devido ao seu bom desempenho na Escola São Paulo, recebeu uma bolsa de estudos para fazer um curso de inglês na FISK Centro de Ensino.

No final de 2010, prestou vestibular e foi aprovado para os cursos de: Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Viçosa (UFV), Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e Engenharia de Exploração e Produção de Petróleo pela Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF).

Em 2011, mudou-se para Campos dos Goytacazes/RJ e iniciou sua graduação em Engenharia de Exploração e Produção de Petróleo na UENF.

No ano de 2012, foi aprovado em 1º lugar no processo seletivo de monitores do LCMAT (Laboratório de Ciências Matemáticas) para ser Monitor de Cálculo Diferencial e Integral I e II para os cursos de Engenharia da UENF.

Em 2013, mudou-se para Macaé/RJ para cursar o ciclo profissional de Engenharia de Exploração e Produção de Petróleo no LENEP (Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo). Ainda em 2013, tornou-se bolsista de Iniciação Científica do Programa de Recursos Humanos da ANP/PETROBRAS, desenvolvendo pesquisa na área de Modelagem Matemática e Computacional em Engenharia de Petróleo e Geofísica, sob orientação do professor Viatcheslav Ivanovich Priimenko, Ph.D.

Em 2014, foi membro da Comissão Organizadora do XII Encontro de Engenharia de Exploração e Produção de Petróleo (ENGEPE), um dos maiores eventos acadêmicos do país na área de E&P de Petróleo.

Em 2015, começou a estagiar na INVISION GEOPHYSICS, uma empresa de consultoria e serviços especializada no processamento de dados sísmicos e de caracterização de reservatórios.

À Patrícia, Ivo, Elisa, Romeu, Creusa e Pâmela.

## Agradecimentos

---

Aos meus pais, Patrícia Bastos Barbosa Oliveira e Ivo Alves de Oliveira, pela minha vida e por todo o carinho, amor, dedicação e educação que me deram.

À minha irmã, Elisa Barbosa de Oliveira, por sua companhia e amizade.

Aos meus avós, Creusa Bastos Barbosa e Romeu de Paula Barbosa, por sempre estarem ao meu lado, me ajudando, sendo exemplo de pessoas dignas, benevolentes e honestas.

À minha namorada Pâmela Beatriz Dias de Oliveira, por todo o carinho, amor e apoio.

Aos meus tios, Ivan e Nicelma, e primos, Carlos Vítor, Rafaela e Priscila, por me acolherem em sua casa no meu primeiro ano fora de casa em Muriaé/MG.

Aos meus tios, Toninho e Cecília, e primos, Ana Paula, Alexandre e Aline, por me acolherem durante 3 anos em sua casa em Muriaé/MG, sendo para mim exemplos de pessoas batalhadoras, persistentes e caridosas.

Aos meus tios, Ronaldo e Célia, e primos, Ronaldinho, Fabrício, Leonardo, Simone e Leozinho, por me acolherem por 2 anos em sua casa em Campos dos Goytacazes/RJ e por todos os ensinamentos e carinho.

Aos meus tios, Demétrio e Maria da Penha, por toda ajuda e carinho.

Ao meu tio Henock, por sua amizade e alegria contagiante.

Aos meus bisavós, Humberto e Nair, por serem para mim exemplos de pessoas calmas, mansas e felizes.

Aos meus tios, Alessandra, Ricardo e Danielle, e primos, Bianca, Beatriz e Romeuzinho.

À minha avó, Maria Aparecida Delgado de Oliveira.

Aos meus primos Monique e Rafael, pela amizade e pelas caronas.

Aos meus tios, Antônio Cláudio e Lélis.

À toda a minha família, tios e primos aqui não mencionados, por todos os momentos juntos.

À todos os professores e funcionários da escola municipal “Professora Olívia Maria Coelho”, da escola estadual “Professor Tomás Aquino Pereira”, da “Escola São Paulo”,

da FISK Centro de Ensino e da UENF.

À todos os meus amigos de Barão de Monte Alto/MG, Muriaé/MG, Campos dos Goytacazes/RJ e Macaé/RJ, em especial aos meus companheiros de república, Lucas Bomfim, Pedro Canhaço e Rafael Guerra.

À família Paula-Barbosa, por todas as reuniões de família, pelos ensinamentos de caridade e amor transmitidos e pela doutrina espírita.

Ao meu orientador, professor Viatcheslav Ivanovich Priimenko, por ter me dado a oportunidade de ser seu orientado e por estar sempre presente, me auxiliando e dando conselhos.

Ao professor Fernando Sérgio de Moraes pela oportunidade de estagiar na Invision Geophysics.

Aos professores membros da banca examinadora, Marco Antônio Rodrigues de Ceia e Sérgio Adriano Moura Oliveira.

Ao comitê gestor do PRH20-ANP-CTPETRO/LENEP/CCT/UENF, a Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP, a Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP e ao Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT pelo fornecimento de bolsa de estudos e taxa de bancada por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCT.

Ao comitê gestor do PRH20-ANP-PETROBRAS/LENEP/CCT/UENF, e a Universidade Petrobras pelo fornecimento de bolsa de estudos e taxa de bancada por meio do PFRH-PETROBRAS, Programa de Formação de Recursos Humanos da Petrobras.



*"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim." (Chico Xavier)*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xiii</b>
Alfabeto Latino . . . . .	xiii
Alfabeto Grego . . . . .	xv
Sub-índices . . . . .	xv
Super-índices . . . . .	xvi
Símbolos . . . . .	xvi
Acrônimos . . . . .	xvi
<b>Resumo</b>	<b>xvii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Escopo do Problema . . . . .	1
1.2 Objetivo . . . . .	4
1.3 Organização do Documento . . . . .	4
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>6</b>
2.1 Teoria da Poroelasticidade . . . . .	6
2.2 Resposta Poroelástica . . . . .	7
<b>3 Metodologia</b>	<b>10</b>

3.1	Motivação para o Tema . . . . .	10
3.2	Classificação da Pesquisa . . . . .	11
3.3	Simulação Computacional . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>14</b>
4.1	Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio do Tempo . . . . .	14
4.2	Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio da Frequência . . . . .	16
4.3	Formato Ursin: Sistema de Biot-JKD como um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	17
4.4	Solução Sem a Presença de Fonte . . . . .	21
4.5	Solução Com a Presença de Fonte . . . . .	33
4.6	Solução no Espaço Original . . . . .	45
4.7	Simulação da Propagação das Ondas Elásticas em Meio Homogêneo .	46
<b>5</b>	<b>Resultados e Análises</b>	<b>49</b>
5.1	Resultados para o Caso 1 . . . . .	50
5.2	Resultados para o Caso 2 . . . . .	51
5.3	Resultados para o Caso 3 . . . . .	52
5.4	Análise dos Resultados . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>
6.1	Conclusões . . . . .	55
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	57
	<b>Referências</b>	<b>59</b>
	<b>Apêndice A - Tipos de Fonte</b>	<b>61</b>
	<b>Apêndice B - Algoritmo: Solução Analítica do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte</b>	<b>64</b>

<b>Apêndice C - Código Computacional: Solução do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte</b>	<b>66</b>
<b>Apêndice D - Código Computacional: Fonte Harmônica</b>	<b>75</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>78</b>

# ***Lista de Figuras***

1	Aplicações de sistemas poroelásticos . . . . .	2
2	Meio poroso . . . . .	3
3	Interface $\bar{z}$ . . . . .	23
4	Ilustração de $\Psi^+$ e $\Psi^-$ na interface $\bar{z}$ . . . . .	24
5	Meio estratificado com $n$ interfaces . . . . .	26
6	Ondas incidente, refletida e transmitida na interface $z_n$ . . . . .	28
7	Interface fictícia $z_s^+$ logo abaixo do local onde se encontra a fonte . . . . .	35
8	Fonte localizada abaixo da interface Terra/Ar . . . . .	38
9	Fonte localizada abaixo da interface Terra/Ar em um meio homogêneo . . . . .	43
10	Função da fonte no domínio do tempo . . . . .	47
11	Função da fonte no domínio da frequência . . . . .	47
12	Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a $0,02\ m$ . . . . .	50
13	Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a $0,02\ m$ . . . . .	50
14	Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a $0,06\ m$ . . . . .	51
15	Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a $0,06\ m$ . . . . .	51
16	Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a $0,1\ m$ . . . . .	52
17	Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a $0,1\ m$ . . . . .	52

## ***Lista de Tabelas***

1	Propriedades do meio poroso e do fluido . . . . .	48
2	Velocidades das ondas compressoriais rápida e lenta para os três casos simulados considerando-se um meio homogêneo . . . . .	54

# Nomenclatura

A nomenclatura está dividida em: alfabeto latino, alfabeto grego, sub-índices, super-índices, símbolos e acrônimos, sendo apresentada em ordem alfabética.

## Alfabeto Latino

$a$	Tortuosidade
$\mathbf{b}_m$	Autovetor de $M_1 M_2$ associado ao autovalor $q_m^2$
$c_p$	Velocidade de propagação da onda compressional [ $m/s$ ]
$C$	Módulo de Biot
$\mathbf{D}$	Vetor de ondas descendentes $2 \times 1$
$f$	Força externa na fase líquida
$f_d$	Frequência dominante da fonte [ $Hz$ ]
$\tilde{f}$	Força externa na fase líquida no domínio da frequência
$f(t)$	Função no domínio do tempo
$\mathbf{f}$	Vetor de força externa na fase líquida
$F$	Fator elétrico da formação
$\dot{F}$	Força externa na fase sólida
$\tilde{F}$	Força externa na fase sólida no domínio da frequência
$F(\omega)$	Função no domínio da frequência
$\mathbf{F}$	Vetor de força externa na fase sólida
$G$	Módulo de cisalhamento [ $Pa$ ]
$h(\omega)$	Espectro do momento sísmico
$H(t)$	Momento sísmico
$i$	Unidade imaginária
$\mathbf{I}$	Matriz identidade $3 \times 3$
$\mathbf{J}$	Matriz de salto $4 \times 4$
$k_0$	Limite de permeabilidade para frequência zero [ $m^2$ ]
$k(\omega)$	Permeabilidade dinâmica

$L$	Matriz $4 \times 4$ definida em blocos
$L_1$	Matriz $2 \times 2$ , onde sua $m$ -ésima coluna é formada por $b_m$
$L_2$	Matriz $2 \times 2$ , onde sua $m$ -ésima coluna é formada por $y_m$
$M$	Módulo de Biot [ $Pa$ ]
$M$	Matriz $4 \times 4$ definida em blocos
$M_{1,2}$	Matrizes simétricas $2 \times 2$
$n_j$	Parâmetro adimensional
$p_f$	Pressão no fluido [ $Pa$ ]
$q$	Velocidade de filtração de Darcy [ $m/s$ ]
$q_m$	Autovalor da matriz $M$ associado ao autovetor $[b_m, y_m]^T$
$q$	Vetor velocidade de filtração de Darcy [ $m/s$ ]
$S$	Vetor fonte $4 \times 1$
$t$	Variável de tempo
$t_c$	Tempo de chegada da onda sísmica ao receptor [ $s$ ]
$T_m$	Matriz de transmissão da interface $z_m$
$U$	Vetor de ondas ascendentes $2 \times 1$
$v$	Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida [ $m/s$ ]
$v$	Vetor velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida [ $m/s$ ]
$y_m$	Autovetor de $M_2 M_1$ associado ao autovalor $q_m^2$
$z$	Profundidade do receptor [ $m$ ]
$z_0$	Ponto fixo no interior de uma camada
$z_s$	Profundidade da fonte [ $m$ ]
$z_m$	Interface
$z_n$	Última interface



## Alfabeto Grego

$\Gamma_m$	Matriz de reflexão da interface $z_m$
$\delta$	Delta de Dirac
$\eta$	Viscosidade do fluido [ $Pa \cdot s$ ]
$\lambda$	Parâmetro de Lamé [ $Pa$ ]
$\Lambda$	Matriz diagonal $2 \times 2$ , onde as entradas da diagonal são formadas por $q_m$
$\tilde{\Lambda}$	Matriz diagonal $4 \times 4$ , onde as entradas da diagonal são formadas por $\Lambda$
$\nu$	Comprimento viscoso característico [ $m$ ]
$\pi$	Número pi (3, 14159265358979...)
$\rho$	Massa específica média ou total [ $kg/m^3$ ]
$\rho_f$	Massa específica do fluido [ $kg/m^3$ ]
$\rho_s$	Massa específica da parte sólida [ $kg/m^3$ ]
$\sigma$	Tensão [ $Pa$ ]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões [ $Pa$ ]
$\tau$	Variável de tempo passado
$\phi$	Porosidade
$\Phi$	Vetor solução
$\Psi$	Vetor de ondas ascendentes e descendentes
$\omega$	Variável de frequência
$\omega_j$	Frequência de relaxação [ $Hz$ ]
$\omega_d$	Frequência dominante da fonte [ $rad/s$ ]
$\Omega$	Frequência de relaxação [ $Hz$ ]

## Sub-índices

$d$	Dominante
$f$	Fluido
$m$	Interface de descontinuidade/Tipo de onda compressional (rápida ou lenta)/Camada
$n$	Última interface
$s$	Parte sólida da rocha/Fonte

## Super-índices

$\sim$	Domínio da frequência, após aplicação da transformada de Fourier
$-$	Local acima da interface de descontinuidade
$+$	Local abaixo da interface de descontinuidade
$-1$	Função inversa/Matriz inversa
$T$	Matriz transposta/Vetor transposto

## Símbolos

$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial em relação ao tempo
$\frac{\partial}{\partial z}$	Derivada parcial em relação a profundidade
$d$	Operador diferencial
$e$	Função exponencial
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$'$	Derivada
$\int$	Operador Integral
$\nabla$	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergente
$\Delta$	Diferença entre duas variáveis
$\infty$	Número infinito

## Acrônimos

CCT	Centro de Ciência e Tecnologia
JKD	Johnson, Koplik e Dashen
LENEP	Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
1D	Unidimensional
3D	Tridimensional

# MODELAGEM DE PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELÁSTICAS EM MEIOS POROSOS 1D: MODELO DE BIOT-JKD

## *Resumo*

A teoria da poroelasticidade é aplicada nos casos de materiais porosos preenchidos por fluidos, sendo de grande interesse em muitas aplicações da engenharia de petróleo, como por exemplo, na exploração e caracterização de reservatórios de óleo/gás, detecção de hidrato de gás, monitoramento sísmico de armazenamento de  $CO_2$  e hidrogeologia.

Além destas áreas, pode-se citar a área da vibroacústica, onde materiais porosos são utilizados devido suas propriedades de absorção e amortecimento do som; como exemplo o uso de materiais porosos como isolantes sonoros em veículos, teatros e em estruturas aeroespaciais. Estes materiais também são utilizados em bioengenharia, a exemplo da modelagem de estruturas ósseas.

A teoria mais conhecida foi desenvolvida por Maurice A. Biot, um físico belga naturalizado americano. Em 1956, Biot publicou dois famosos artigos que estabeleceram a teoria da poroelasticidade. Esta teoria descreve a propagação de ondas em um sólido elástico poroso que contém um fluido viscoso compressível. Biot dividiu o estudo em duas partes: a primeira trata da propagação de ondas elásticas em um meio saturado para frequências baixas, enquanto a segunda trata das altas frequências. Para altas frequências, os efeitos inerciais são predominantes e o modo lento é ativado; conseqüentemente, a amplitude do campo de onda é atenuada devido às perdas de energia em presença de fluido viscoso. Estas características do processo apresentam dificuldades na modelagem da propagação de ondas em meios poroelásticos.

O meio poroso natural é composto por uma fase sólida e espaços entre esta fase sólida, estes espaços contém ou não fluidos. Um exemplo de meio poroso natural é a rocha reservatório de petróleo. Quando uma força externa ao meio poroelástico é aplicada, ocorre uma transferência desta ao fluido presente nos interstícios. Este excesso de pressão obriga a expulsão de parte do fluido, dissipando-se o excesso de pressão dos poros. O que por sua vez, se distribui na forma de tensões, conhecidas como tensões efetivas, sobre a matriz sólida, promovendo deformações do meio.

Neste trabalho, considera-se o caso das altas frequências e assume-se que os poros do meio poroso estão interconectados e totalmente preenchidos por fluidos (saturados); além disso, considera-se o caso da permeabilidade dinâmica, quando ela depende da frequência temporal, proposta por Johnson, Koplik e Dashen (JKD) em 1987.

O objetivo principal deste trabalho é simular, considerando-se um problema misto para o sistema de Biot-JKD, a resposta poroelástica de um meio poroso delgado 1D e em seguida realizar uma análise numérico-analítica da influência da variação dos parâmetros físicos e petrofísicos do meio na solução do problema.

A metodologia deste trabalho se baseia na teoria da poroelasticidade moderna, na teoria das equações diferenciais parciais e ordinárias, no formalismo de Ursin, em álgebra linear, em métodos numéricos e em programação utilizando-se o MatLab.

Após aplicação das metodologias abordadas, chegou-se a uma solução analítica para o sistema das equações de Biot-JKD considerando-se um meio poroso homogêneo. Com o intuito de se obter a validação das equações desenvolvidas, foi implementado um código computacional capaz de calcular a solução do sistema de equações.

Um programa computacional foi desenvolvido e o algoritmo criado pôde ser validado através de simulações, além disso, os resultados obtidos nas simulações confirmaram a efetividade do método proposto.

O algoritmo desenvolvido serve como base para a criação de métodos de resolução de problemas inversos associados com a caracterização de parâmetros petrofísicos de reservatórios.

**Palavras chave:** teoria da poroelasticidade, sistema das equações de Biot-JKD, meio poroso delgado 1D, resposta poroelástica, altas frequências.

## **Abstract**

*The theory of poroelasticity is applied in the case of porous materials filled with fluid, and it is of great interest in many petroleum engineering applications, such as in the exploration and characterization of oil/gas reservoirs, gas hydrate detection, seismic monitoring of CO<sub>2</sub> storage and hydrogeology.*

*In addition to these areas, one may cite the vibroacoustic area where porous materials are used because of their absorbing properties and sound damping; as an example the use of porous materials such as sound insulation in vehicles, theaters and aerospace structures. These materials are also used in bioengineering, such as the modeling of bone structures.*

*The best-known poroelastic theory was developed by Maurice A. Biot, a Belgian-born American physicist. In 1956 Biot published two famous articles that established the theory of poroelasticity. This theory describes the wave propagation in elastic porous solid which contains a compressible viscous fluid. Biot divided his studies into two parts: the first is the propagation of elastic waves in a saturated medium to low frequencies, while the second deals with high frequencies. For high frequencies, inertial effects are prevalent and the slow mode is activated; consequently, the amplitude of the wave field is attenuated due to energy losses in the presence of viscous fluid. These process characteristics present difficulties in modeling of the wave propagation in poroelastic media.*

*The natural porous medium comprises a solid phase and porous space which contains fluid or not. An example of natural porous medium is the reservoir rock. When an external force in the poroelastic medium is applied, it occurs a transfer of this force to the fluid present in the interstices. The excess of pressure forces the expulsion of the fluid, dissipating the pore pressure. That is distributed in the form of stress, known as the effective stress on the solid matrix, promoting the deformation of the medium.*

*In this work, it is considered the case of high frequencies, assuming that the pores of the porous medium are interconnected and filled by fluids (saturated); Furthermore,*

*it is considered the case of dynamic permeability, as it depends of the temporal frequency, proposed by D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen (JKD) in 1987.*

*The main objective of this work is to simulate, considering a mixed problem for the Biot-JKD system, the poroelastic response of an 1D thin porous medium and then perform a numerical and analytical analysis of the influence of the variation of the physical and petrophysical parameters of the medium in solving the problem.*

*The methodology of this study is based on the theory of modern poroelasticity, the theory of partial and ordinary differential equations, the Ursin formalism, the linear algebra, the numerical methods and programming using MatLab.*

*After application of methodologies, it came to an analytical solution to the system of equations of Biot-JKD considering a homogeneous porous medium. In order to obtain the validation of the developed equations, it was implemented a computer code capable of calculating the solution of the equation system.*

*A computer software was developed and the algorithm could be validated through simulations, moreover, the results obtained from simulations have confirmed the effectiveness of the proposed method.*

*This algorithm serves as the basis for the establishment of inverse problem solving methods associated with the characterization of petrophysical parameters of reservoirs, such as porosity and permeability.*

**Keywords:** *theory of poroelasticity, Biot-JKD system of equations, 1D thin porous medium, poroelastic response, high frequencies.*

# 1 *Introdução*

No presente trabalho realiza-se um estudo da teoria clássica de Biot, desenvolvida em meados da década 1950, que descreve teoricamente a propagação das ondas elásticas através de um meio poroso que contém fluido. Além disso, considera-se o caso da permeabilidade dinâmica, quando ela depende da frequência temporal.

## 1.1 Escopo do Problema

A teoria da poroelasticidade é aplicada nos casos de materiais porosos (Figura 2a) preenchidos por fluidos, sendo de grande interesse em muitas aplicações da engenharia de petróleo, como por exemplo, na exploração e caracterização de reservatórios de óleo/gás (Figura 1a), detecção de hidrato de gás, monitoramento sísmico de armazenamento de  $CO_2$  e hidrogeologia<sup>1</sup>.

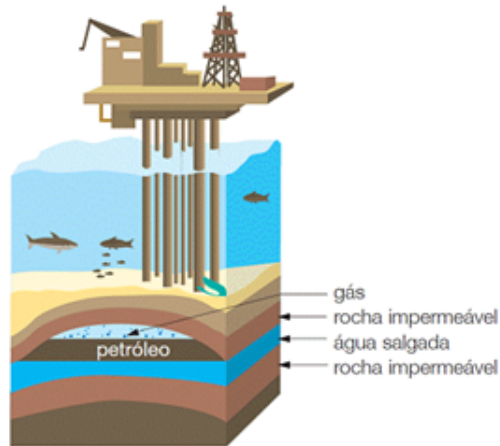
Além destas áreas, pode-se citar a área da vibroacústica, onde materiais porosos são utilizados devido suas propriedades de absorção e amortecimento do som (Figura 1b); como exemplo o uso de materiais porosos como isolantes sonoros em veículos, teatros e em estruturas aeroespaciais. Estes materiais também são utilizados em bioengenharia, a exemplo da modelagem de estruturas ósseas (Figura 1c).

A teoria mais conhecida foi desenvolvida por Maurice Anthony Biot, um físico belga naturalizado americano. Em 1956, Biot publicou seus dois famosos artigos que estabeleceram a teoria da poroelasticidade. Esta teoria descreve a propagação de ondas em um sólido elástico poroso que contém um fluido viscoso compressível.

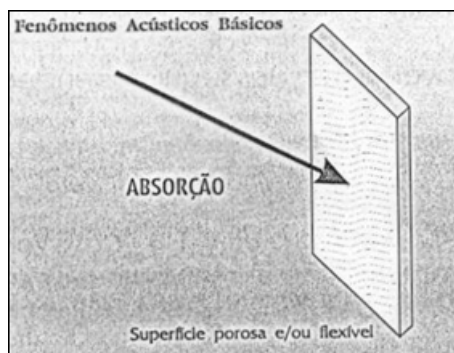
Biot dividiu o seu estudo em duas partes. A primeira trata da propagação de ondas elásticas em um meio saturado para frequências baixas (BIOT, 1956a), enquanto a segunda trata das altas frequências (BIOT, 1956b).

---

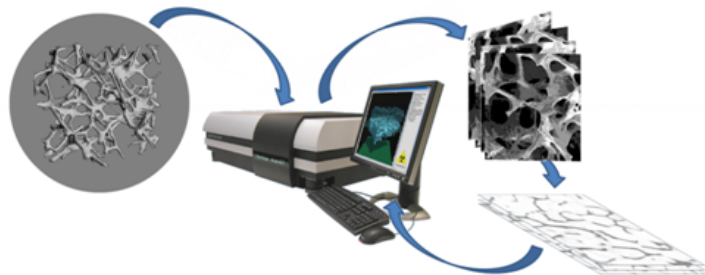
<sup>1</sup>Hidrogeologia é o ramo das Geociências (ciências da terra) que estuda as águas subterrâneas quanto ao seu movimento, volume, distribuição e qualidade.



(a) Exploração e caracterização de reservatórios de óleo/gás



(b) Isolantes sonoros



(c) Modelagem de estruturas ósseas

Figura 1: Aplicações de sistemas poroelásticos

A teoria assume que os efeitos anelásticos<sup>2</sup> surgem a partir de uma interação viscosa entre o fluido e o sólido e prevê duas ondas compressivas e uma cisalhante. A onda compressional rápida corresponde ao movimento no qual o deslocamento do sólido e do fluido estão em fase, enquanto que a onda compressional lenta é uma onda difusiva que corresponde ao movimento no qual os deslocamentos das fases sólida e fluida não estão em fase.

Para baixas frequências, o meio não suporta onda lenta, que se torna difusiva, desde que os efeitos da viscosidade do fluido dominem os efeitos inerciais. Para altas frequências, os efeitos inerciais são predominantes e o modo lento é ativado. Conseqüentemente, a amplitude do campo de onda é atenuada devido às perdas de energia em presença de fluido viscoso. Estas características do processo apresentam dificuldades na modelagem da propagação de ondas em meios poroelásticos.

Em 1987, Johnson, Koplik e Dashen (JKD) publicaram uma expressão geral para

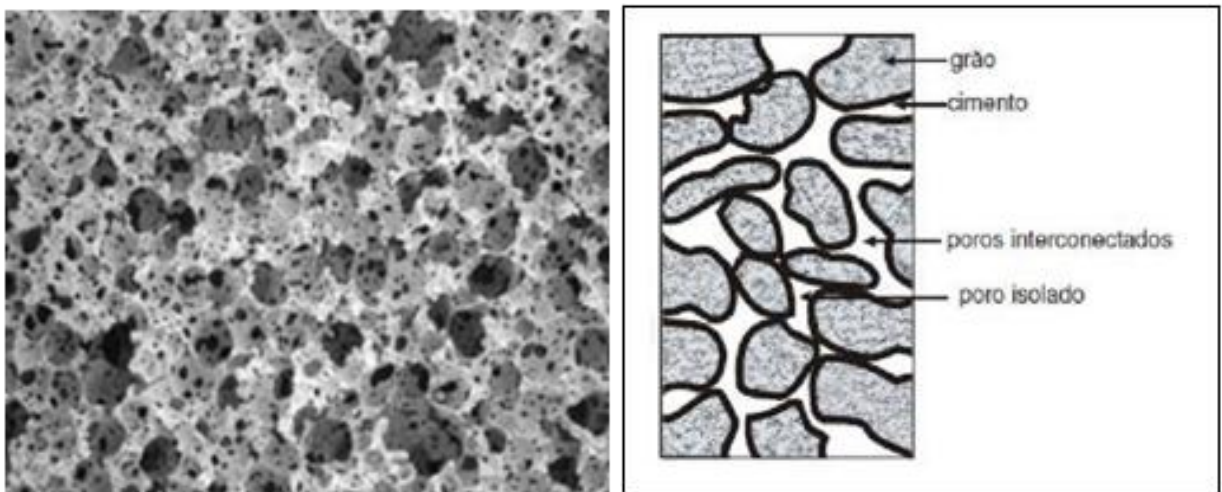
<sup>2</sup>*Anelasticidade*: Alguns materiais apresentam uma “componente” de deformação elástica dependente do tempo, ou seja, após retirada a carga é necessário um certo tempo para que haja a recuperação do material (para o material retornar ao seu estado inicial).



a dissipação de energia no caso de poros aleatórios (JOHNSON *et al.*, 1987), levando ao modelo de Biot-JKD, amplamente utilizado.

O meio poroso natural é composto por uma fase sólida e espaços entre esta fase sólida (Figura 2b), estes espaços contém ou não fluidos. Um exemplo de meio poroso natural é a rocha reservatório de petróleo.

Comumente trata-se o meio poroso como um meio contínuo fictício, sendo possível assim calcular para cada ponto do meio poroso qualquer propriedade física que se deseje. Dessa forma, ao considerar-se o meio poroso contínuo, pressupõe-se a existência de um volume elementar infinitesimal representativo para todas as propriedades físicas desse meio poroso.



(a) Meio poroso natural

(b) Modelo esquemático de um meio poroso

Figura 2: Meio poroso

Neste trabalho, considera-se o caso de altas frequências e assume-se que os poros do meio poroso estão interconectados e totalmente preenchidos por fluidos (saturados). Sendo assim, o meio poroso em questão é formado por três componentes distintas: O esqueleto sólido, o fluido que preenche os poros da rocha e o material sólido (grãos) formadores do esqueleto.

O meio poroso pode sofrer a ação de alguma força, conseqüentemente a fase sólida pode sofrer deformação. Quando a ação da força cessar, o meio pode voltar ao seu estado inicial, o que caracteriza um material elástico. Caso haja a presença de fluido nos poros do meio, esta fase fluida tende a resistir ao fluxo, o que caracteriza a viscosidade do fluido ali presente. Assim, um meio poroso que possua estas duas

características é conhecido como *meio poroelástico*.

Quando uma força externa ao meio poroelástico é aplicada, ocorre uma transferência dessa carga ao fluido presente nos interstícios. Este excesso de pressão obriga a expulsão de parte deste fluido dos poros. O que por sua vez, se distribui na forma de tensões, conhecidas como tensões efetivas, sobre a matriz sólida, promovendo as deformações do meio.

## 1.2 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é simular, considerando-se um problema misto para o sistema de Biot-JKD, a resposta poroelástica de um meio poroso delgado 1D e em seguida realizar uma análise numérico-analítica da influência da variação dos parâmetros físicos e petrofísicos do meio na solução do problema.

## 1.3 Organização do Documento

Apresenta-se nesta seção a organização do documento.

No Capítulo 2, “Revisão Bibliográfica”, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos, técnicos e científicos, que estão diretamente relacionados ao presente trabalho. São expostos um conjunto de conceitos e definições básicas da teoria da poroelasticidade, apresentando-se em seguida o sistema das equações de Biot-JKD para um meio poroso 3D que servirá como base para o desenvolvimento do sistema de equações para o caso 1D.

No Capítulo 3, “Metodologia”, apresenta-se a metodologia científica utilizada no desenvolvimento deste trabalho. Inclui-se informações sobre a motivação para o tema, classificação da pesquisa (área da pesquisa), instrumentos utilizados (equipamentos e softwares), dados e simulações.

No Capítulo 4, “Desenvolvimento”, apresenta-se a formulação do problema (sistema das equações de Biot-JKD para o caso 1D), define-se as condições de fronteira e dados iniciais. Além disso, é mostrado todo o processo de resolução do sistema de equações, baseado no formalismo de Ursin, e os dados de entrada da simulação numérica elaborada para se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado.

No Capítulo 5, “Resultados e Análises”, são apresentados os resultados encon-

trados, na forma de gráficos da solução do sistema de Biot-JKD, bem como a análise desses resultados.

No Capítulo 6, “Conclusões”, apresenta-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Apresenta-se a seguir os “Apêndices”:

Apêndice A: “Tipos de Fonte”, neste apêndice descreve-se a formulação matemática dos tipos de fonte utilizados neste trabalho: fonte do tipo dinamite e fonte pontual vertical que pode ser utilizada para modelar uma fonte do tipo martelo, queda de um peso ou uma vibração.

Apêndice B: “Algoritmo: Solução Analítica do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo com a Presença de Fonte”, apresenta-se neste apêndice o algoritmo desenvolvido, previamente à criação do código computacional, com o objetivo de definir passo-a-passo como será encontrada a solução do sistema de Biot-JKD para um meio homogêneo com a presença de fonte.

Apêndice C: “Código Computacional: Solução do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo com a Presença de Fonte”, apresenta-se neste apêndice o código computacional, elaborado para se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado, que calcula a solução do sistema de Biot-JKD para um meio homogêneo com a presença de fonte.

Apêndice D: “Código Computacional: Fonte Harmônica”, neste apêndice apresenta-se o código computacional desenvolvido para plotar os gráficos da função da fonte no domínio do tempo e no domínio da frequência.

## 2 *Revisão Bibliográfica*

Apresenta-se neste capítulo uma revisão bibliográfica dos trabalhos, técnicos e científicos, que estão diretamente relacionados ao presente trabalho. São expostos um conjunto de conceitos e definições básicas da teoria da poroelasticidade, apresentando-se em seguida o sistema das equações de Biot-JKD para um meio poroso 3D que servirá como base para o desenvolvimento do sistema de equações para o caso 1D.

### 2.1 Teoria da Poroelasticidade

A teoria da poroelasticidade foi iniciada através de observações experimentais feitas por Henry Darcy<sup>1</sup> (DARCY, 1856). O conceito de meio poroso surgiu dos trabalhos de Terzaghi<sup>2</sup> (TERZAGHI, 1923) na área de mecânica dos solos, onde a noção de pressão efetiva foi introduzida para descrever a influência do fluido que satura o material poroso na deformação quase-estática<sup>3</sup> dos solos.

Em 1935, Biot apresentou uma teoria mais geral da poroelasticidade (BIOT, 1935). Em 1941, Kosten e Zwikker propuseram duas equações acopladas de conservação do momento para a fase fluida e fase sólida de um material poroso, prevendo a existência de dois modos compressoriais, porém esta teoria não previa um modo de cisalhamento, assim o módulo de compressibilidade em termos de experimentos drenados e não-drenados não poderia ser determinado (BLANC, 2013).

Frenkel, em 1944, se tornou o primeiro autor a desenvolver um conjunto completo de equações dinâmicas que governam a acústica de meios porosos isotrópicos, onde

---

<sup>1</sup>Em 1856, Darcy publicou resultados de experimentos sobre o fluxo de água através de leitos de areia que estabeleceram o que tornou-se conhecido como lei de Darcy. A unidade da permeabilidade de fluidos, darcy, é nomeada em honra de seu trabalho.

<sup>2</sup>Karl von Terzaghi foi um engenheiro austríaco reconhecido como o pai da mecânica dos solos e da engenharia geotécnica.

<sup>3</sup>deformação que ocorre após um carregamento quase estático, em que a carga é aplicada subitamente e depois permanece sem variações de intensidade ao longo do tempo.

duas ondas compressoriais e uma cisalhante se propagam (FRENKEL, 1944).

Em 1956, Biot expandiu sua própria teoria da poroelasticidade dinâmica, descrevendo completamente o comportamento mecânico de um meio poroelástico. A teoria de Biot ignora a escala microscópica e prevê três tipos de ondas elásticas: uma onda cisalhante e duas ondas compressoriais, uma rápida e uma lenta (BIOT, 1956a; BIOT, 1956b).

(RICE; CLEARY, 1976) reformularam a teoria de Biot, interpretando os dois comportamentos, drenado e não-drenado, de um meio poroso saturado com fluido.

A previsão da onda lenta de Biot foi motivo de controvérsia no meio científico até que em 1980, Plona observou experimentalmente este tipo de onda (PLONA, 1980).

## 2.2 Resposta Poroelástica

Uma generalização da teoria de Biot-JKD foi dada recentemente em (PRIDE *et al.*, 2004). As relações entre tensão e deformação utilizadas são as mesmas definidas em (BIOT, 1956a; BIOT, 1956b) e possuem a definição física do módulo de elasticidade efetiva dado em (BIOT; WILLIS, 1957).

Nas equações desenvolvidas em (PRIDE *et al.*, 1992), o movimento da matriz sólida é também dado em termos do deslocamento absoluto da fase sólida, porém, para a fase fluida, o movimento é dado em função do deslocamento do fluido relativo ao sólido. O fluxo de fluido é modelado utilizando-se a lei generalizada de Darcy, representada no domínio da frequência temporal  $\omega$  por:

$$\mathbf{q} = \frac{k(\omega)}{\eta} (-\nabla p_f + i\omega\rho_f\mathbf{v}) \quad (2.1)$$

Onde  $p_f$  é a pressão no fluido,  $\mathbf{q}$  é a velocidade de filtração de Darcy,  $\mathbf{v}$  é a velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida,  $\eta$  é a viscosidade do fluido,  $\rho_f$  é a massa específica do fluido e  $k(\omega)$  é a permeabilidade dinâmica.

Na equação (2.1), a permeabilidade depende da frequência devido ao aparecimento de camadas viscosas nas fronteiras dos poros, para frequências suficientemente altas.

Para *baixas frequências*, o fluxo em cada poro é controlado pelo cisalhamento viscoso e é inteiramente laminar.

Para *altas frequências*, os efeitos inerciais começam a dominar as forças cisalhantes, resultando em um ideal *plug flow*<sup>4</sup> em cada poro, exceto próximo à interface sólido/fluido onde forças cisalhantes dominam porque o movimento relativo é nulo nas superfícies dos grãos. Assim, criam-se camadas viscosas nas fronteiras próximas às superfícies dos grãos, cujas espessuras decrescem com o aumento da frequência (MASSON; PRIDE, 2010).

De acordo com (JOHNSON *et al.*, 1987), a permeabilidade dinâmica  $k(\omega)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{k(\omega)}{k_0} = \left[ \sqrt{1 - i \frac{\omega}{\Omega}} - i \frac{\omega}{\omega_j} \right]^{-1} \quad (2.2)$$

Onde  $\omega_j$  e  $\Omega$  são frequências de relaxação e  $k_0$  é o limite de permeabilidade para frequência zero, definidos abaixo:

$$\omega_j = \frac{\eta}{\rho_f F k_0} \quad (2.3)$$

$$\Omega = \frac{n_j \omega_j}{4} \quad (2.4)$$

$$k_0 = \frac{\nu^2}{8F} \quad (2.5)$$

Onde  $\nu$  é o comprimento viscoso característico<sup>5</sup>,  $n_j$  é um parâmetro adimensional<sup>6</sup> e  $F$  o fator elétrico da formação.

$$F = \frac{a}{\phi} \quad (2.6)$$

$$n_j = \frac{\nu^2}{F k_0} \quad (2.7)$$

Onde  $a$  é a tortuosidade do meio e  $\phi$  a porosidade.

(PLYUSHCHENKOV; TURCHANINOV, 2000) obtiveram analiticamente a transformada

<sup>4</sup>Em mecânica dos fluidos, *plug flow* é um modelo simples do perfil de velocidade de um fluido que flui em um tubo. No *plug flow*, a velocidade do fluido é assumida como sendo constante através de toda seção transversal do tubo. O modelo *plug flow* assume que não há camada fronteira adjacente à parede interna do tubo.

<sup>5</sup>Representa a razão média entre o volume e a área superficial dos poros do material.

<sup>6</sup>Para arenitos limpos,  $n_j = 8$  é consistente com experimentos numéricos e experimentais. Para *shaly sands*,  $n_j \ll 8$  (MASSON; PRIDE, 2010).

inversa de Fourier de  $k(\omega)$  definida na equação (2.2). Utilizando-se este resultado, de acordo com (MASSON; PRIDE, 2010), a versão no domínio do tempo da lei de Darcy generalizada, equação (2.1), é dada pela seguinte expressão:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + F \rho_f \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\nabla p_f - \frac{\eta}{k_0} \int_0^t \frac{e^{-\Omega(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left( \frac{\partial \mathbf{q}(\tau)}{\partial \tau} + \Omega \mathbf{q}(\tau) \right) d\tau + \mathbf{f} \quad (2.8)$$

Onde  $\tau$  é a variável de tempo passado e  $\mathbf{f}$  é a força externa na fase líquida.

As equações remanescentes da teoria de Biot-JKD incluem a conservação total do momento linear, apresentada abaixo:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \quad (2.9)$$

Onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é um tensor de tensão,  $\mathbf{F}$  é a força externa na fase sólida e  $\rho$  é a massa específica média ou total do meio, dada pela equação abaixo:

$$\rho = \rho_f \phi + \rho_s (1 - \phi) \quad (2.10)$$

Onde  $\rho_s$  é a massa específica da parte sólida. E as leis constitutivas de tensão e deformação do meio poroso isotrópico são:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = (\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + C \nabla \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I} + G \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -C \nabla \cdot \mathbf{v} - M \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.12)$$

Onde  $\lambda$  é o parâmetro de Lamé,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $C$  e  $M$  são os módulos de Biot, que caracterizam as propriedades físicas do meio poroso,  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $3 \times 3$ , veja (MASSON; PRIDE, 2010) para maiores detalhes.

As equações (2.8), (2.9), (2.11) e (2.12), compõe o sistema das equações de Biot-JKD para o caso 3D.

## **3 Metodologia**

Apresenta-se neste capítulo a metodologia científica utilizada no desenvolvimento deste trabalho. Inclui-se informações sobre a motivação para o tema, classificação da pesquisa (área da pesquisa), instrumentos utilizados (equipamentos e softwares), dados e simulações.

### **3.1 Motivação para o Tema**

- Envolvimento anterior com o tema:
  - Conhecimentos adquiridos nas disciplinas: Métodos Geofísicos de Exploração II - Sísmicos, Propriedades Físicas de Minerais e Rochas, Métodos da Física-Matemática, Perfuração de Poços I e Interpretação Integrada Geologia-Geofísica.
- Usos futuros do conhecimento na área em estudo:
  - Elaboração de softwares aplicativos considerando os conceitos analisados;
  - Como tema base para a realização de mestrado;
  - Estudo e aperfeiçoamento das variáveis envolvidas.
- Facilidades pessoais para a abordagem do tema:
  - Estudo dos conceitos matemáticos e físicos envolvidos no processo.
- Dificuldades que podem ser minoradas a partir do trabalho:
  - Dificuldades no trato da língua inglesa;
  - Necessidade de ampliar conhecimentos em programação e utilização de simulação no computador;
  - Ampliação do conhecimento de alguns conceitos envolvidos no processo.



## 3.2 Classificação da Pesquisa

Pode-se classificar o tipo de pesquisa sob diferentes aspectos, a seguir, faz-se a classificação deste trabalho quanto ao fim, quando ao tipo de modelagem e quanto ao tipo de análise.

### 3.2.1 Quanto ao Fim, Área, Sub-área e Disciplinas Relacionadas

- Quanto ao fim:
  - Aplicada.
- Área de estudo:
  - Geociências.
- Sub-área de estudo:
  - Geofísica.
- Subordinação do tema a áreas do conhecimento científico:
  - Matemática aplicada e computacional;
  - Engenharia de petróleo;
  - Geofísica de poço;
  - Mecânica do contínuo.
- Disciplinas relacionadas:
  - Métodos Geofísicos de Exploração II - Sísmicos;
  - Propriedades Físicas de Minerais e Rochas;
  - Métodos da Física-Matemática;
  - Perfilagem de Poços I ;
  - Interpretação Integrada Geologia-Geofísica.

### **3.2.2 Quanto ao Tipo de Modelagem**

O presente trabalho é de caráter teórico pois envolve o estudo de modelos físicos e matemáticos, e o desenvolvimento de equações diferenciais que dão resposta ao problema proposto. Embora possam ser utilizados modelos numérico-computacionais e o desenvolvimento de algoritmos e programas, a essência do problema científico é tratada através do modelo físico-matemático.

### **3.2.3 Quanto ao Tipo de Análise**

Quanto ao tipo de análise pode-se classificar a pesquisa em analítica.

### **3.2.4 Limitações do Trabalho**

Apresenta-se nesta subseção as limitações deste trabalho.

#### **3.2.4.1 Limitações Espaciais**

- Todo o trabalho será desenvolvido no LENEP/CCT/UENF.

#### **3.2.4.2 Limitações quanto ao Setor da Indústria**

- O presente trabalho estabelece um estudo ligado a engenharia de petróleo e a setores de geofísica de poço e petrofísica.

#### **3.2.4.3 Limitações quanto a Fase do Empreendimento Atingida**

- Neste trabalho não se pretende realizar uma simulação computacional para um meio estratificado, será realizada apenas uma simulação para um meio 1D homogêneo a fim de se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado.

### **3.2.5 Pressupostos**

- Para o presente estudo, a simulação computacional será realizada utilizando-se os dados disponíveis em (BLANC *et al.*, 2013).

### 3.2.6 Hipóteses de Trabalho

1. Meio poroelástico unidimensional (1D);
2. Meio poroelástico com camadas homogêneas e isotrópicas;
3. Poros do meio poroso são interconectados e totalmente saturados com um fluido;
4. A amplitude das perturbações é pequena;
5. Altas frequências;
6. Os efeitos termo-mecânicos são negligenciáveis.

## 3.3 Simulação Computacional

Será feita uma simulação computacional com o intuito de se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado, que calcula a solução do sistema de equações de Biot-JKD para um meio poroelástico homogêneo com a presença de fonte do tipo pontual vertical.

Após apresentação dos resultados obtidos, será feita uma análise desses resultados, baseando-se na teoria da propagação de ondas elásticas em um meio poroso saturado para altas frequências.

### 3.3.1 Equipamento

- Computador *Sun Ultra 40 M2 Workstation*, 2 x AMD Opteron 1207 Rev F Model 2222SE (3.0 GHz/dual-core) processor, 8GB (4x1GB) DDR-667 ECC memory, 3 x 146GB 15,000rpm SAS HDD with Solaris 10 pre-installed, NVIDIA Quadro FX3500 PCI-Express graphics card, DVD Dual, 2 x 10/100/1000 Ethernet, two x16 PCI Express slots, two x8 PCI Express slots, one legacy PCI slot. Standard Configuration. RoHS-6 compliant. [1 monitor wide 21"].

### 3.3.2 Software

- MatLab. Versão 7.12.0.635 (R2011a). 64-bit (win64). Número de licença: 535616.

## 4 *Desenvolvimento*

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento deste trabalho, a formulação do problema (sistema das equações de Biot-JKD para o caso 1D), define-se as condições de fronteira e dados iniciais. Além disso, é mostrado todo o processo de resolução do sistema de equações, baseado no formalismo de Ursin, e os dados de entrada da simulação numérica elaborada para se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado.

### 4.1 Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio do Tempo

A partir do sistema das equações de Biot-JKD para o caso 3D, pode-se reduzir este sistema para o caso 1D, levando-se em consideração apenas a variável relativa à profundidade  $z$ .

A conservação total do momento linear, pode ser re-escrita através da Equação (2.9):

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \dot{F} \quad (4.1)$$

A lei de Darcy generalizada (Equação 2.8), para o caso 1D é dada por:

$$\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + F \rho_f \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p_f}{\partial z} - \frac{\eta}{k_0} \int_0^t \frac{e^{-\Omega(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left( \frac{\partial q(\tau)}{\partial \tau} + \Omega q(\tau) \right) d\tau + f \quad (4.2)$$

E as leis constitutivas de tensão e deformação do meio poroso isotrópico, Equações (2.11) e (2.12), são expressadas por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{\partial v}{\partial z} + C \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -C \frac{\partial v}{\partial z} - M \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.4)$$

Dessa forma, as Equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) constituem o sistema das equações de Biot-JKD no domínio do tempo para o caso 1D.

#### 4.1.1 Condições de Fronteira

Neste trabalho, os meios poroelásticos considerados são estratificados e formados por camadas homogêneas, onde cada camada possui propriedades físicas constantes em seu interior, ou seja, tais parâmetros são funções constantes por partes, variando somente de acordo com a profundidade  $z$ .

Devido a estratificação dos meios poroelásticos, existe a presença de discontinuidades, ou seja, fronteiras de camadas com propriedades distintas.

O fenômeno que descreve a difração, refração e reflexão das ondas está diretamente relacionado com a presença destas interfaces.

Para descrever tais condições admite-se a continuidade das variáveis:  $v$ ,  $q$ ,  $\sigma$  e  $p_f$ , em cada camada, devido ao fato do meio ser contínuo no interior da mesma, porém a continuidade destas funções precisa ser estudada nas interfaces de separação dos meios contínuos e na superfície livre do meio poroso.

##### 4.1.1.1 Interface entre Dois Meios Porosos

De acordo com (CARCIONE, 2007), na interface de descontinuidade entre dois meios porosos homogêneos tem-se a continuidade das variáveis  $v$ ,  $q$ ,  $\sigma$  e  $p_f$ .

##### 4.1.1.2 Superfície Livre de um Meio Poroso

Não existem restrições para o deslocamento, desde que o meio esteja livre para se mover. Por esta razão, a tensão e a pressão no fluido desaparecem:

$$\sigma = p_f = 0 \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Dados Iniciais

Para o tempo  $t = 0$ , tem-se:

$$v = q = \sigma = p_f = 0 \quad (4.6)$$

## 4.2 Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio da Frequência

Para transformar as equações do sistema de Biot-JKD do domínio do tempo para o domínio da frequência temporal  $\omega$ , utiliza-se a transformada de Fourier, representada pela seguinte expressão (considerando-se  $f(t) \equiv 0$ , para  $t < 0$ ):

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.7)$$

Após aplicação da transformada de Fourier nas Equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), chega-se ao sistema das equações de Biot-JKD no domínio da frequência (caso 1D):

$$-i\omega\rho v - i\omega\rho_f q = \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \tilde{F} \quad (4.8)$$

$$-i\omega\rho_f v - i\omega F\rho_f q = -\frac{\partial p_f}{\partial z} - \mathcal{L}(\omega)q + \tilde{f} \quad (4.9)$$

$$-i\omega\sigma = (\lambda + 2G)\frac{\partial v}{\partial z} + C\frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.10)$$

$$-i\omega p_f = -C\frac{\partial v}{\partial z} - M\frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.11)$$

Onde:

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{\eta}{k_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (\Omega + i\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

### 4.3 Formato Ursin: Sistema de Biot-JKD como um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Baseando-se nas ideias de (URSIN, 1983), o sistema das equações diferenciais parciais de Biot-JKD no domínio da frequência pode ser escrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, seguindo o formato:

$$\frac{d}{dz}\Phi = -i\omega M\Phi + S \quad (4.13)$$

Onde  $\Phi$  é um vetor  $4 \times 1$  formado pelas variáveis do sistema,  $M$  é uma matriz  $4 \times 4$  definida em blocos e  $S$  é um vetor  $4 \times 1$  (vetor fonte):

$$\Phi = \begin{bmatrix} v \\ -q \\ \sigma \\ p_f \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{F}(z) \\ \tilde{f}(z) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde  $M_1$  e  $M_2$  são matrizes simétricas  $2 \times 2$ :

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\beta M & -\beta C \\ -\beta C & -\beta(\lambda + 2G) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \rho & -\rho_f \\ -\rho_f & \gamma(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

E  $\beta$  e  $\gamma(\omega)$  são expressados por:

$$\beta = \frac{1}{C^2 - M(\lambda + 2G)} \quad (4.19)$$

$$\gamma(\omega) = F\rho_f - \frac{\mathcal{L}(\omega)}{i\omega} \quad (4.20)$$

### 4.3.1 Diagonalização de Ursin

(URSIN, 1983) propôs um desenvolvimento que é capaz de decompor a solução analítica do sistema, dada pela Equação (4.13), em duas partes: ondas *ascendentes* e ondas *descendentes*.

Para que as ondas ascendentes e descendentes sejam obtidas é preciso aplicar o método de diagonalização de Ursin à matriz  $M$  do sistema de equações.

Supõe-se então que  $M_1M_2$  possui dois autovalores não nulos e distintos, designados por  $q_m^2$ , os quais estão associados aos autovetores  $\mathbf{b}_m$ . Assim:

$$M_1M_2\mathbf{b}_m = q_m^2\mathbf{b}_m \quad (4.21)$$

Define-se:

$$\mathbf{y}_m = \frac{1}{q_m}M_2\mathbf{b}_m \quad (4.22)$$

Onde  $q_m = \sqrt{q_m^2}$ . O valor da raiz quadrada é escolhido de forma que:  $Im(q_m) \geq 0$  e  $q_m > 0$ , se  $q_m$  for real.

Multiplicando-se a Equação (4.22) por  $M_1M_2$  e utilizando-se (4.21), obtêm-se:

$$M_2M_1\mathbf{y}_m = q_m^2\mathbf{y}_m \quad (4.23)$$

Dessa forma, percebe-se que  $\mathbf{y}_m$  é autovetor de  $M_2M_1$  associado ao autovalor  $q_m^2$ .

Da Equação (4.22), tem-se que:

$$M_2\mathbf{b}_m = q_m\mathbf{y}_m \quad (4.24)$$

Além disso, multiplicando-se a Equação (4.22) por  $M_1$  e utilizando-se (4.21), chega-se a:



$$M_1 \mathbf{y}_m = q_m \mathbf{b}_m \quad (4.25)$$

Logo, a partir das Equações (4.24) e (4.25), pode-se dizer que  $q_m$  é autovalor da matriz  $M$ , associado ao autovetor  $[\mathbf{b}_m, \mathbf{y}_m]^T$ .

Seja  $L_1$  uma matriz  $2 \times 2$ , onde sua  $m$ -ésima coluna é formada por  $\mathbf{b}_m$  e seja  $L_2$  uma matriz  $2 \times 2$ , onde sua  $m$ -ésima coluna é formada por  $\mathbf{y}_m$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Segundo (AZEREDO, 2013) é possível verificar que:

$$(L_1^T)^{-1} = L_2 \quad (4.28)$$

Seja  $\Lambda$  uma matriz diagonal  $2 \times 2$ , onde as entradas da diagonal são formadas por  $q_m$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

Através das Equações (4.22) e (4.28), tem-se que:

$$M_2 = L_2 \Lambda L_2^T \quad (4.29)$$

Além disso, a partir de (4.25) e (4.28), pode-se verificar que:

$$M_1 = L_1 \Lambda L_1^T \quad (4.30)$$

Seja  $L$  a matriz  $4 \times 4$  definida em blocos:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_1 & L_1 \\ L_2 & -L_2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

E seja  $\tilde{\Lambda}$  a matriz diagonal:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

De acordo com (4.29) e (4.30), conclui-se que a matriz  $M$  pode ser diagonalizada da seguinte forma:

$$M = L\tilde{\Lambda}L^{-1} \quad (4.33)$$

Onde a matriz  $L^{-1}$  é representada por:

$$L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T & L_1^T \\ L_2^T & -L_1^T \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

### 4.3.2 Autovalores e Autovetores para o Sistema de Biot-JKD

Os autovalores para o sistema de Biot-JKD são:

$$q_m^2 = \frac{1}{2}\beta \left\{ 2C\rho_f - [M\rho + (\lambda + 2G)\gamma(\omega)] \pm \sqrt{[(\lambda + 2G)\gamma(\omega) - M\rho]^2 - 4[M\rho_f - C\gamma(\omega)][C\rho - (\lambda + 2G)\rho_f]} \right\}, \quad m = 1, 2. \quad (4.35)$$

Quando  $m = 1$ , considera-se a presença da onda compressional rápida (sinal positivo) e quando  $m = 2$  há a presença da onda compressional lenta (sinal negativo).

Os autovetores são:

$$\mathbf{b}_m = \bar{a}_m \begin{bmatrix} -1 \\ \xi_m \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2. \quad (4.36)$$

$$\mathbf{y}_m = \frac{\bar{a}_m}{q_m} \begin{bmatrix} -\rho - \rho_f \xi_m \\ \rho_f + \gamma(\omega) \xi_m \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2. \quad (4.37)$$

Onde:

$$\xi_m = \frac{C\rho_f - M\rho - \frac{q_m^2}{\beta}}{M\rho_f - C\gamma(\omega)}, \quad m = 1, 2. \quad (4.38)$$

$$\bar{a}_m = \sqrt{\frac{M^2\rho_f^2 - 2M\rho_f C\gamma(\omega) + C^2\gamma^2(\omega)}{M^2(\rho_f^2 + \rho^2) + C^2(\rho_f^2 + \gamma^2(\omega)) - 2M\rho_f C(\rho + \gamma(\omega)) - 2(\rho_f C - M\rho)\frac{q_m^2}{\beta} + \left(\frac{q_m^2}{\beta}\right)^2}}, \quad m = 1, 2. \quad (4.39)$$

## 4.4 Solução Sem a Presença de Fonte

Nesta seção, tem-se início o processo de resolução do sistema das equações de Biot- JKD. Inicialmente considera-se o caso onde não há a presença de fontes.

A solução é encontrada para um meio geológico homogêneo, introduzindo-se os conceitos de ondas ascendentes e ondas descendentes.

### 4.4.1 Meio Homogêneo: Ondas Ascendentes e Ondas Descendentes

Em um meio homogêneo e na ausência de fontes, tem-se que o vetor utilizado para representá-las será nulo, ou seja,  $S = 0$ . Dessa forma, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de dimensão 4, dado por:

$$\frac{d}{dz}\Phi = -i\omega M\Phi \quad (4.40)$$

Seja:

$$\Phi = L\Psi \quad (4.41)$$

Substituindo-se a Equação (4.41) em (4.40), obtém-se:

$$\frac{d}{dz}(L\Psi) = -i\omega M(L\Psi) \quad (4.42)$$

De acordo com (4.33), tem-se que  $M = L\tilde{\Lambda}L^{-1}$ , logo:

$$\frac{d}{dz}\Psi = -i\omega\tilde{\Lambda}\Psi \quad (4.43)$$

Como há interesse em analisar a solução do sistema (4.43), considera-se:

$$\Psi = \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Onde  $U$  e  $D$  são vetores de dimensão  $2 \times 1$ . O vetor  $U$  representa as ondas ascendentes e o vetor  $D$  representa as ondas descendentes.

A solução de uma equação diferencial ordinária desse tipo, com condição inicial  $\Psi(z_0)$  é:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_0)}\Psi(z_0) \quad (4.45)$$

Assim, a solução (4.45) para um meio homogêneo com ausência de fonte pode ser re-escrita como (WHITE; ZHOU, 2006):

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} e^{-i\omega\Lambda(z-z_0)}U(z_0) \\ e^{i\omega\Lambda(z-z_0)}D(z_0) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Onde  $z_0$  é um ponto fixo no interior da camada considerada e  $e^{\pm i\omega\Lambda(z-z_0)}$  uma matriz diagonal onde o  $m$ -ésimo elemento da diagonal é igual a  $e^{\pm i\omega q_m(z-z_0)}$ .

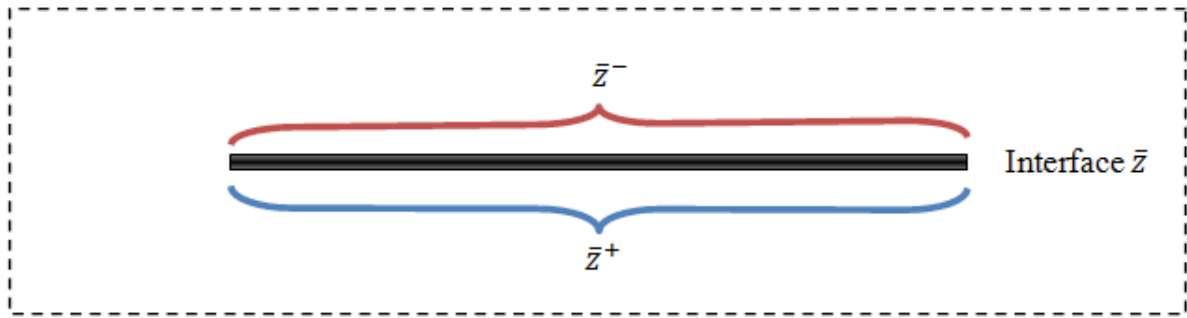
#### 4.4.2 Condição de Salto na Interface entre as Camadas

Admitindo-se a ausência de fonte, considera-se uma interface  $z = \bar{z}$ , onde os parâmetros materiais variam descontinuamente através de  $\bar{z}$ . Demarca-se então com o sobrescrito (+) quantidades avaliadas em  $\bar{z}^+$ , que estão imediatamente abaixo da interface  $\bar{z}$ , por outro lado demarca-se com (-) as quantidades avaliadas em  $\bar{z}^-$ , exatamente acima de  $\bar{z}$ . Veja a Figura (3).

De acordo com as condições de fronteira sabe-se que  $\Phi$  é contínua através da interface  $\bar{z}$ . Em outras palavras, o seu salto é nulo, logo:

$$\Phi^+ = \Phi^- \quad (4.47)$$

Utilizando-se a relação dada por (4.41), obtém-se:

Figura 3: Interface  $\bar{z}$ 

$$L^+ \Psi^+ = L^- \Psi^- \quad (4.48)$$

De onde pode-se dizer que:

$$\Psi^+ = (L^+)^{-1} L^- \Psi^- \quad (4.49)$$

$$\Psi^- = (L^-)^{-1} L^+ \Psi^+ \quad (4.50)$$

Chama-se então de  $J$  a *matriz de salto*, representada por:

$$J = (L^+)^{-1} L^- \quad (4.51)$$

Verifica-se que:

$$J^{-1} = (L^-)^{-1} L^+ \quad (4.52)$$

Dessa forma, substituindo-se a Equação (4.51) em (4.49) e a Equação (4.52) em (4.50), obtém-se as seguintes condições de salto, respectivamente:

$$\Psi^+ = J \Psi^- \quad (4.53)$$

$$\Psi^- = J^{-1} \Psi^+ \quad (4.54)$$

Logo, as matrizes de salto  $J$  e  $J^{-1}$  fornecem uma relação entre a solução abaixo da interface  $\bar{z}$  com a solução acima desta interface.

Uma ilustração de  $\Psi^+$  e  $\Psi^-$  na interface  $\bar{z}$  é dada pela Figura (4), onde  $\Psi^+$  indica o limite da solução por pontos imediatamente abaixo da interface, enquanto que  $\Psi^-$  indica o limite da solução por pontos imediatamente acima da interface.

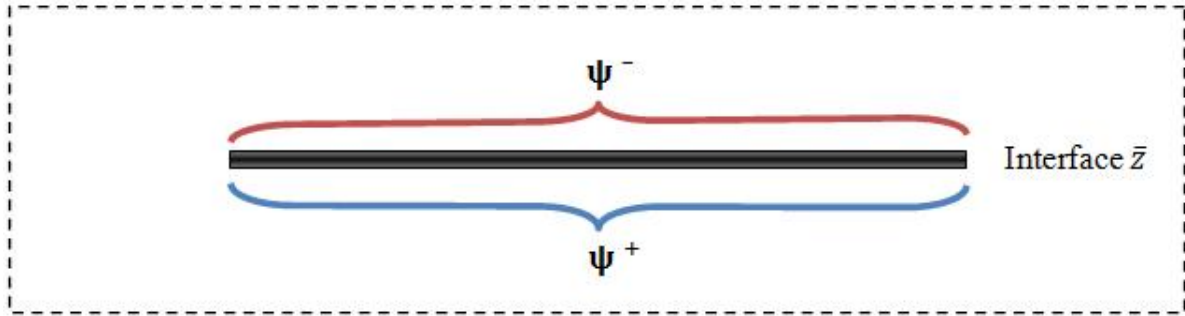


Figura 4: Ilustração de  $\Psi^+$  e  $\Psi^-$  na interface  $\bar{z}$

Identifica-se agora os termos da matriz  $J$ , e conseqüentemente, os da matriz  $J^{-1}$ .

De acordo com as Equações (4.31) e (4.34), tem-se que:

$$\mathbf{L}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^- & \mathbf{L}_1^- \\ \mathbf{L}_2^- & -\mathbf{L}_2^- \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$(\mathbf{L}^+)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_2^+)^T & (\mathbf{L}_1^+)^T \\ (\mathbf{L}_2^+)^T & (-\mathbf{L}_1^+)^T \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Substituindo-se (4.55) e (4.56) em (4.51), obtém-se:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- + (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- & (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- - (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \\ (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- - (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- & (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- + (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Pode-se dizer então que:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A & \mathbf{J}_B \\ \mathbf{J}_B & \mathbf{J}_A \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Onde:

$$\mathbf{J}_A = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- + (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \right] \quad (4.59)$$

$$\mathbf{J}_B = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- - (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \right] \quad (4.60)$$

De acordo com a Equação (4.52), tem-se que  $\mathbf{J}^{-1} = (\mathbf{L}^-)^{-1} \mathbf{L}^+$ , assim, trocando-se os sobrescritos (+) por (-) e (-) por (+) na matriz de salto  $\mathbf{J}$  dada em (4.57), tem-se que:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_2^-)^T \mathbf{L}_1^+ + (\mathbf{L}_1^-)^T \mathbf{L}_2^+ & (\mathbf{L}_2^-)^T \mathbf{L}_1^+ - (\mathbf{L}_1^-)^T \mathbf{L}_2^+ \\ (\mathbf{L}_2^-)^T \mathbf{L}_1^+ - (\mathbf{L}_1^-)^T \mathbf{L}_2^+ & (\mathbf{L}_2^-)^T \mathbf{L}_1^+ + (\mathbf{L}_1^-)^T \mathbf{L}_2^+ \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Sendo assim, das relações dadas em (4.59) e (4.60), verifica-se que:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_A^T & -\mathbf{J}_B^T \\ -\mathbf{J}_B^T & \mathbf{J}_A^T \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Considerando-se o fato de que  $\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{I}$ , obtém-se as seguintes propriedades (AZEREDO, 2013):

$$\mathbf{J}_A \mathbf{J}_A^T - \mathbf{J}_B \mathbf{J}_B^T = \mathbf{I} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_A - \mathbf{J}_B^T \mathbf{J}_B = \mathbf{I} \quad (4.64)$$

$$\mathbf{J}_A \mathbf{J}_B^T = \mathbf{J}_B \mathbf{J}_A^T \quad (4.65)$$

$$\mathbf{J}_A^T \mathbf{J}_B = \mathbf{J}_B^T \mathbf{J}_A \quad (4.66)$$

#### 4.4.3 Meio Estratificado: Matriz de Reflexão e Matriz de Transmissão

Nesta seção, considera-se um meio estratificado com  $n$  interfaces que se encontram nas profundidades:  $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n < \infty$ . Da mesma forma das seções anteriores, considera-se o meio homogêneo no interior de cada camada e não há a presença de fonte. Denota-se com o subscrito  $m$  as soluções avaliadas abaixo da interface  $z_m$ , em outras palavras, entre  $z_m$  e  $z_{m+1}$ . Veja a Figura (5).

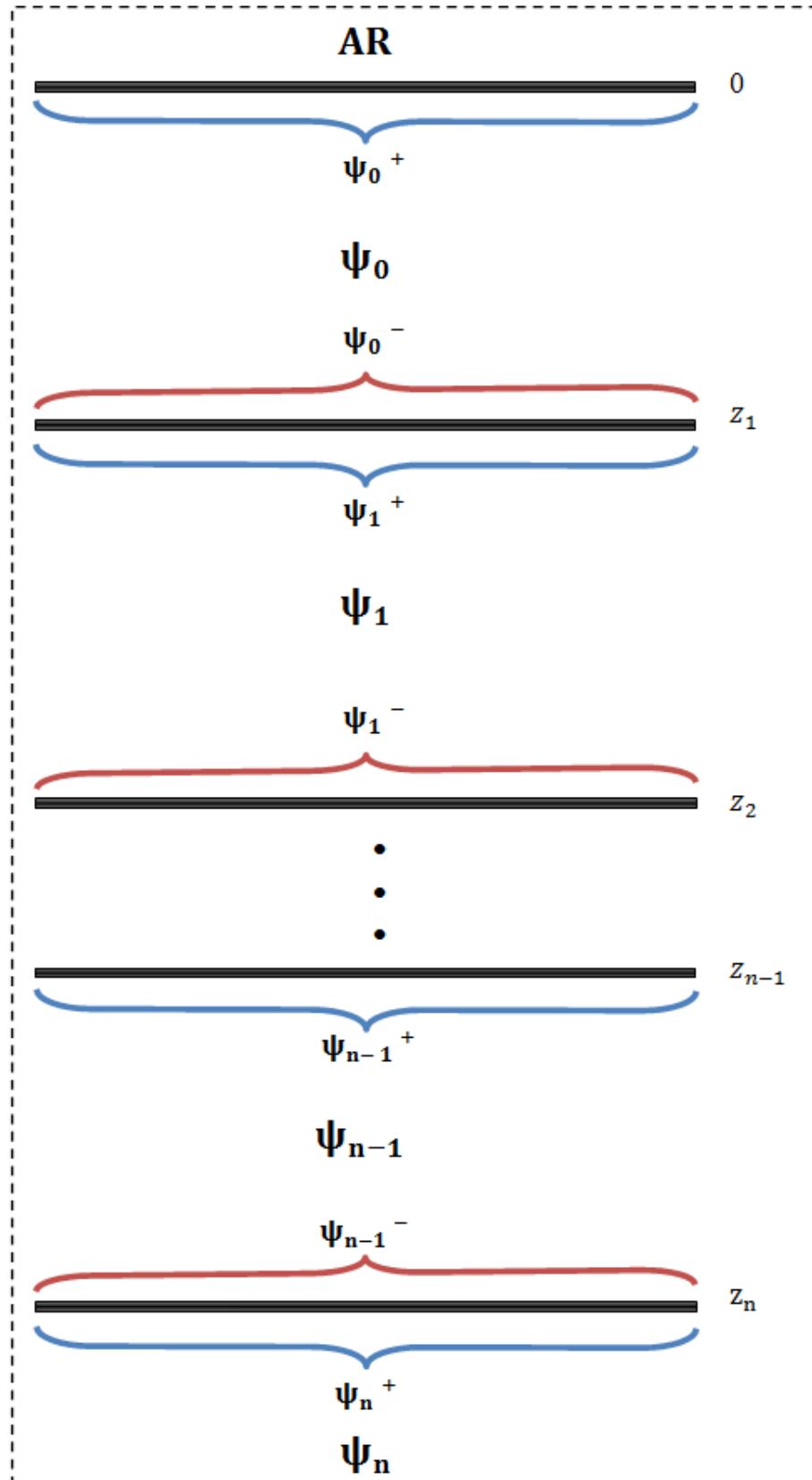


Figura 5: Meio estratificado com  $n$  interfaces

Seguindo-se esta notação, a matriz  $J_m$  representa a matriz de salto quando se usa os parâmetros físicos das camadas  $z_{m-1} < z < z_m$  e  $z_m < z < z_{m+1}$ .



Após estabelecidas as notações, analisa-se o que acontece na última interface  $z_n$ . Da condição de salto dada pela Equação (4.54) tem-se que:

$$\Psi_{n-1}^- = \mathbf{J}_n^{-1} \Psi_n^+ \quad (4.67)$$

Das equações dadas por (4.44) e (4.62) tem-se que:

$$\begin{bmatrix} U_{n-1}^- \\ D_{n-1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{A,n}^T & -\mathbf{J}_{B,n}^T \\ -\mathbf{J}_{B,n}^T & \mathbf{J}_{A,n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n^+ \\ D_n^+ \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Já que se considera a camada abaixo da interface  $z_n$  como infinita e portanto homogênea, então não haverá ondas refletidas, logo tem-se que  $U_n^+ = 0$ . Daí conclui-se a partir da Equação (4.68) que:

$$U_{n-1}^- = -\mathbf{J}_{B,n}^T D_n^+ \quad (4.69)$$

$$D_{n-1}^- = \mathbf{J}_{A,n}^T D_n^+ \quad (4.70)$$

Das Equações (4.69) e (4.70) tem-se que:

$$U_{n-1}^- = -\mathbf{J}_{B,n}^T (\mathbf{J}_{A,n}^T)^{-1} D_{n-1}^- \quad (4.71)$$

Definindo-se:

$$\Gamma_n = -\mathbf{J}_{B,n}^T (\mathbf{J}_{A,n}^T)^{-1} \quad (4.72)$$

Tem-se então que  $\Gamma_n$  é a matriz de reflexão da interface  $z = z_n$ . Esta matriz pode, portanto, calcular a onda refletida  $U_{n-1}^-$  no topo da interface  $z_n$  quando a onda incidente  $D_{n-1}^-$  é conhecida. Veja a Figura (6).

Logo, substituindo-se (4.72) em (4.71), obtém-se:

$$U_{n-1}^- = \Gamma_n D_{n-1}^- \quad (4.73)$$

De acordo com (4.69), tem-se que:

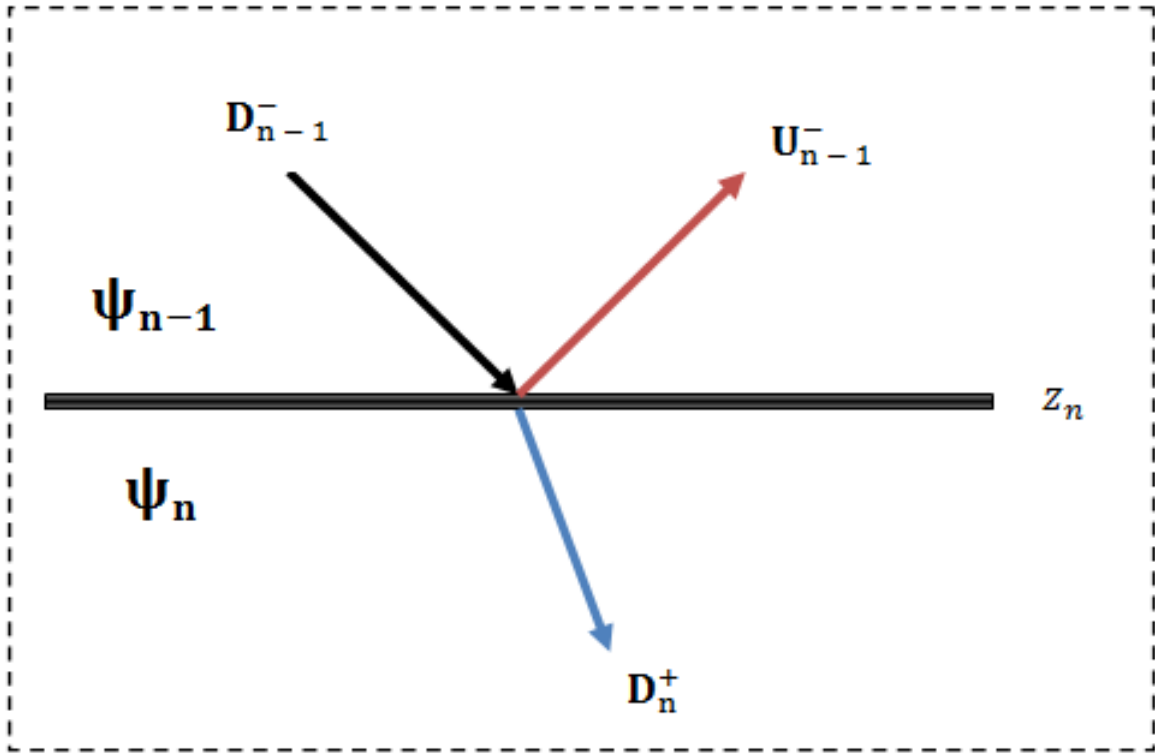


Figura 6: Ondas incidente, refletida e transmitida na interface  $z_n$

$$D_n^+ = (-J_{B,n}^T)^{-1} U_{n-1}^- \quad (4.74)$$

Substituindo-se então a Equação (4.71) em (4.74) chega-se a:

$$D_n^+ = (-J_{B,n}^T)^{-1} (-J_{B,n}^T) (J_{A,n}^T)^{-1} D_{n-1}^- \quad (4.75)$$

Logo:

$$D_n^+ = (J_{A,n}^T)^{-1} D_{n-1}^- \quad (4.76)$$

Definindo-se:

$$T_n = (J_{A,n}^T)^{-1} \quad (4.77)$$

Tem-se então que  $T_n$  é a matriz de transmissão da interface  $z = z_n$ . Esta matriz pode, portanto, calcular a onda transmitida  $D_n^+$  através da interface  $z_n$ , quando a onda incidente  $D_{n-1}^-$  é conhecida. Dessa forma, substituindo-se (4.77) em (4.76), tem-se:

$$D_n^+ = T_n D_{n-1}^- \quad (4.78)$$

Considerando-se agora a penúltima interface  $z_{n-1}$ , de acordo com a condição de salto dada por (4.54), tem-se:

$$\Psi_{n-2}^- = J_{n-1}^{-1} \Psi_{n-1}^+ \quad (4.79)$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} U_{n-2}^- \\ D_{n-2}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{A,n-1}^T & -J_{B,n-1}^T \\ -J_{B,n-1}^T & J_{A,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1}^+ \\ D_{n-1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Define-se a espessura da camada por:

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.81)$$

Na Equação (4.45) foi visto que a solução num ponto  $z$  em um meio homogêneo sem a presença de fonte é dada por:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega \tilde{\Lambda}(z-z_0)} \Psi(z_0) \quad (4.82)$$

Pode-se concluir que a solução na camada abaixo da interface  $z_{n-1}$  é dada por:

$$\Psi_{n-1}(z) = e^{-i\omega \tilde{\Lambda}(z-z_{n-1})} \Psi_{n-1}(z_{n-1}) \quad (4.83)$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} U_{n-1} \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega \Lambda_{n-1}(z-z_{n-1})} U_{n-1}(z_{n-1}) \\ e^{i\omega \Lambda_{n-1}(z-z_{n-1})} D_{n-1}(z_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Além disso, quando  $z = z_n$ , tem-se as seguintes aproximações:

$$\Psi_{n-1}(z_n) \approx \Psi_{n-1}^- \quad (4.85)$$

$$\Psi_{n-1}(z_{n-1}) \approx \Psi_{n-1}^+ \quad (4.86)$$

Então a Equação (4.84) resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^- \\ \mathbf{D}_{n-1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{U}_{n-1}^+ \\ e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

O que é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^- \\ \mathbf{D}_{n-1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^+ \\ \mathbf{D}_{n-1}^+ \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

De onde chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^+ \\ \mathbf{D}_{n-1}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^- \\ \mathbf{D}_{n-1}^- \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1}^+ \\ \mathbf{D}_{n-1}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{U}_{n-1}^- \\ e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^- \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Substituindo-se então (4.90) em (4.80), obtém-se:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = \mathbf{J}_{A,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{U}_{n-1}^- - \mathbf{J}_{B,n-1}^T e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.91)$$

$$\mathbf{D}_{n-2}^- = -\mathbf{J}_{B,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{U}_{n-1}^- + \mathbf{J}_{A,n-1}^T e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.92)$$

Substituindo-se a Equação (4.73) em (4.91) e (4.92):

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = (\mathbf{J}_{A,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{\Gamma}_n - \mathbf{J}_{B,n-1}^T e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}}) \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.93)$$

$$\mathbf{D}_{n-2}^- = (-\mathbf{J}_{B,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}}) \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.94)$$

Sendo assim, pode-se dizer que:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = (\mathbf{J}_{A,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{\Gamma}_n e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} - \mathbf{J}_{B,n-1}^T) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.95)$$

$$\mathbf{D}_{n-1}^- = \left[ \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \Gamma_n e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \right]^{-1} \mathbf{D}_{n-2}^- \quad (4.96)$$

Definindo-se então:

$$\tilde{\Gamma}_n = e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \Gamma_n e^{i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \quad (4.97)$$

Dessa forma, de acordo com (4.95) e (4.96), tem-se:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = \left( \mathbf{J}_{A,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n - \mathbf{J}_{B,n-1}^T \right) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \mathbf{D}_{n-1}^- \quad (4.98)$$

$$\mathbf{D}_{n-1}^- = \left[ \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \right]^{-1} \mathbf{D}_{n-2}^- \quad (4.99)$$

Substituindo-se (4.99) em (4.98) chega-se a:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = \left( \mathbf{J}_{A,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n - \mathbf{J}_{B,n-1}^T \right) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \left[ \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right) e^{-i\omega\Lambda_{n-1}\Delta z_{n-1}} \right]^{-1} \mathbf{D}_{n-2}^- \quad (4.100)$$

O que é o mesmo que:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = \left( \mathbf{J}_{A,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n - \mathbf{J}_{B,n-1}^T \right) \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right)^{-1} \mathbf{D}_{n-2}^- \quad (4.101)$$

Definindo-se:

$$\Gamma_{n-1} = \left( \mathbf{J}_{A,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n - \mathbf{J}_{B,n-1}^T \right) \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right)^{-1} \quad (4.102)$$

Tem-se que  $\Gamma_{n-1}$  é a matriz de reflexão que possibilita o cálculo da onda refletida  $\mathbf{U}_{n-2}^-$  pela interface  $z_{n-1}$  desde que se conheça a onda incidente  $\mathbf{D}_{n-2}^-$ . Pode-se dizer então que:

$$\mathbf{U}_{n-2}^- = \Gamma_{n-1} \mathbf{D}_{n-2}^- \quad (4.103)$$

Então, de acordo com (4.73) e (4.103), obtém-se por indução o seguinte resultado

para uma interface genérica  $z_m$ :

$$U_{m-1}^- = \Gamma_m D_{m-1}^- \quad (4.104)$$

Onde:

$$\Gamma_m = \left( \mathbf{J}_{A,m}^T \tilde{\Gamma}_{m+1} - \mathbf{J}_{B,m}^T \right) \left( -\mathbf{J}_{B,m}^T \tilde{\Gamma}_{m+1} + \mathbf{J}_{A,m}^T \right)^{-1} \quad (4.105)$$

Sendo:

$$\tilde{\Gamma}_{m+1} = e^{i\omega \Lambda_m \Delta z_m} \Gamma_{m+1} e^{i\omega \Lambda_m \Delta z_m} \quad (4.106)$$

Na Equação (4.78), foi visto que  $D_n^+ = T_n D_{n-1}^-$ . Ao se substituir (4.99) em (4.78), obtém-se:

$$D_n^+ = T_n \left[ \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right) e^{-i\omega \Lambda_{n-1} \Delta z_{n-1}} \right]^{-1} D_{n-2}^- \quad (4.107)$$

Ou seja:

$$D_n^+ = T_n e^{i\omega \Lambda_{n-1} \Delta z_{n-1}} \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right)^{-1} D_{n-2}^- \quad (4.108)$$

Definindo-se:

$$T_{n-1} = T_n e^{i\omega \Lambda_{n-1} \Delta z_{n-1}} \left( -\mathbf{J}_{B,n-1}^T \tilde{\Gamma}_n + \mathbf{J}_{A,n-1}^T \right)^{-1} \quad (4.109)$$

Tem-se que  $T_{n-1}$  é a matriz de transmissão que possibilita o cálculo da onda transmitida  $D_n^+$  pela interface  $z_n$  desde que se conheça a onda incidente  $D_{n-2}^-$ . Pode-se dizer então que:

$$D_n^+ = T_{n-1} D_{n-2}^- \quad (4.110)$$

Logo, por indução chega-se à seguinte relação para uma interface genérica  $z_m$ :

$$D_n^+ = T_m D_{m-1}^- \quad (4.111)$$

Onde:

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{T}_{m+1} e^{i\omega \Lambda_m \Delta z_m} \left( -\mathbf{J}_{B,m}^T \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1} + \mathbf{J}_{A,m}^T \right)^{-1} \quad (4.112)$$

E  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{m+1}$  é dada por (4.106).

A partir de (4.104) e (4.111) e dada a onda  $\mathbf{D}_{m-1}^-$  incidente em uma interface  $z_m$  qualquer, pode-se calcular então a onda refletida por esta interface ( $\mathbf{U}_{m-1}^-$ ) e a onda transmitida pela última interface  $z_n$  ( $\mathbf{D}_n^+$ ).

Dessa forma, todas as matrizes de reflexão e de transmissão podem ser calculadas por recursão (AZEREDO, 2013), utilizando-se de (4.105) e (4.112), iniciando-se por (4.72) e (4.77).

## 4.5 Solução Com a Presença de Fonte

Na seção (4.4), deu-se início ao processo de resolução do sistema das equações de Biot-JKD, considerando-se o caso onde não há a presença de fonte, introduzindo o conceito de ondas ascendentes e ondas descendentes.

Em geofísica, principalmente, na área petrolífera, há a necessidade de se detalhar as camadas da subsuperfície, para tal finalidade faz-se com que uma onda sísmica percorra estas camadas, fornecendo as informações necessárias à análise e enviando-as aos receptores. Para gerar estas ondas utiliza-se uma fonte.

Assim, nesta seção, busca-se a solução para o problema levando-se em consideração a presença de uma fonte. Assume-se que a fonte, a uma profundidade  $z_s$ , é representada pela fórmula:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \delta(z - z_s) + \mathbf{S}_1 \delta'(z - z_s) \quad (4.113)$$

Onde  $\mathbf{S}_0$  e  $\mathbf{S}_1$  são independentes da profundidade  $z$  e  $\delta$  representa o Delta de Dirac. Geralmente, fontes que são distribuídas ao longo da profundidade podem ser sintetizadas pela superposição de fontes do tipo  $\mathbf{S}_0$  e  $\mathbf{S}_1$  (AZEREDO, 2013). Veja mais sobre os tipos de fonte no Apêndice A.

Em um meio homogêneo e na presença de fonte, tem-se que o vetor utilizado para representá-las será não-nulo, ou seja,  $\mathbf{S} \neq 0$ . Assim, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de dimensão 4, dado por:

$$\frac{d}{dz}\Phi = -i\omega M\Phi + S \quad (4.114)$$

Seja:

$$\Phi_0 = \Phi - S_1\delta(z - z_s) \quad (4.115)$$

Utilizando-se as Equações (4.113), (4.115) e (4.114), pode-se dizer que:

$$\frac{d}{dz}\Phi_0 = -i\omega M\Phi_0 + (S_0 - i\omega MS_1)\delta(z - z_s) \quad (4.116)$$

Observa-se então que  $\Phi_0$  satisfaz o sistema (4.114), porém, neste caso, a fonte  $S$  é dada por  $(S_0 - i\omega MS_1)\delta(z - z_s)$ .

De forma similar às condições de salto estudadas nas interfaces entre as camadas, busca-se a análise das condições de salto no local onde se encontra a fonte. Para tal propósito, considera-se uma interface imaginária em  $z_s$ .

Sejam  $S_A$  e  $S_B$  vetores de dimensão 2 definidos por:

$$\begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} = i\omega MS_1 - S_0 \quad (4.117)$$

Assim, integrando-se a Equação (4.116) com valores bem próximos de  $z_s$ , ou seja,  $z = z_s^+$  e  $z = z_s^-$ , e utilizando-se de (4.117) obtém-se:

$$\Phi_0(z_s^-) = \Phi_0(z_s^+) + \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Mas de acordo com (4.115) pode-se dizer que:

$$\Phi(z_s^-) = \Phi(z_s^+) + \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

É possível observar na Equação (4.119) que  $\Phi$  não é contínua através do ponto que contém a fonte, dessa forma, tem-se a condição de salto através da fonte.

Insere-se agora uma interface fictícia logo abaixo do local onde se encontra a fonte, ou seja, no ponto  $z = z_s^+$ . Com isso, a partir dos métodos utilizados na Seção (4.4) busca-se a matriz de reflexão  $\Gamma_S = \Gamma(z_s^+)$ . Veja a Figura (7):



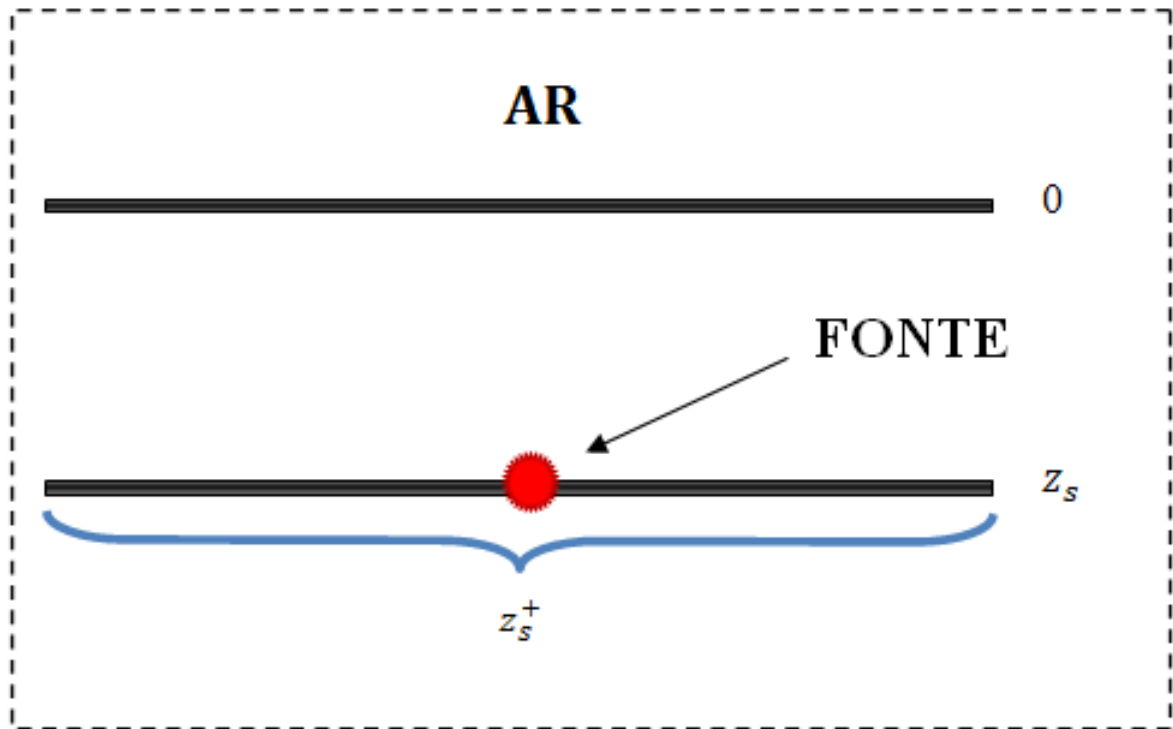


Figura 7: Interface fictícia  $z_s^+$  logo abaixo do local onde se encontra a fonte

De acordo com as Equações (4.59) e (4.60) foi visto que:

$$\mathbf{J}_A = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- + (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \right] \quad (4.120)$$

$$\mathbf{J}_B = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{L}_2^+)^T \mathbf{L}_1^- - (\mathbf{L}_1^+)^T \mathbf{L}_2^- \right] \quad (4.121)$$

Mas como a interface  $z = z_s^+$  é fictícia, tem-se que as propriedades acima e abaixo desta interface são as mesmas (AZEREDO, 2013). Assim, tem-se que  $\mathbf{L}_2^+ = \mathbf{L}_2^-$  e  $\mathbf{L}_1^+ = \mathbf{L}_1^-$ . Logo:

$$\mathbf{J}_A = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_2 \right] \quad (4.122)$$

$$\mathbf{J}_B = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_2 \right] \quad (4.123)$$

Da relação dada por (4.28), pode-se demonstrar que:

$$\mathbf{L}_2^T = \mathbf{L}_1^{-1} \quad (4.124)$$

$$\mathbf{L}_1^T = \mathbf{L}_2^{-1} \quad (4.125)$$

Logo, substituindo-se (4.125) e (4.124) em (4.122) e (4.123), tem-se que para a interface fictícia  $z = z_s^+$ :

$$\mathbf{J}_A = \mathbf{I} \quad (4.126)$$

$$\mathbf{J}_B = \mathbf{0} \quad (4.127)$$

Definindo-se  $\mathbf{U}(z_s^+) \equiv \mathbf{U}_s$  e  $\mathbf{D}(z_s^+) \equiv \mathbf{D}_s$  pode-se dizer a partir de (4.44) que:

$$\Psi(z_s^+) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(z_s^+) \\ \mathbf{D}(z_s^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Na Equação (4.104) foi visto que para uma interface  $z_m$  qualquer, sabe-se por indução que:

$$\mathbf{U}_{m-1}^- = \Gamma_m \mathbf{D}_{m-1}^- \quad (4.129)$$

Portanto, pode-se dizer que:

$$\mathbf{U}_s^- = \Gamma_s \mathbf{D}_s^- \quad (4.130)$$

Mas como se considera que os termos pertencem a uma mesma camada, visto que  $z = z_s$  é uma interface fictícia, tem-se então que:

$$\mathbf{U}_s^- = \mathbf{U}_s \quad (4.131)$$

$$\mathbf{D}_s^- = \mathbf{D}_s \quad (4.132)$$

Dessa forma, substituindo-se (4.131) e (4.132) em (4.130), chega-se a:

$$\mathbf{U}_s = \Gamma_s \mathbf{D}_s \quad (4.133)$$

Logo, a Equação dada por (4.128) pode ser re-escrita como:

$$\Psi(z_s^+) = \begin{bmatrix} \Gamma_s D_s \\ D_s \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

Sabendo-se que  $\Phi = L\Psi$ , nota-se que a Equação (4.134) fornece todos os valores de  $\Phi$  justamente abaixo da fonte.

Considerando-se agora a condição de salto dada por (4.119), chega-se à seguinte Equação após multiplicar-se ambos os lados da Equação por  $L^{-1}$ :

$$L^{-1}\Phi(z_s^-) = L^{-1}\Phi(z_s^+) + L^{-1} \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

Mas como  $\Phi = L\Psi$ , então  $L^{-1}\Phi = \Psi$ , portanto:

$$\Psi(z_s^-) = \Psi(z_s^+) + L^{-1} \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Substituindo-se o valor de  $L^{-1}$ , encontrado em (4.34), na equação (4.135), obtém-se:

$$\Psi(z_s^-) = \Psi(z_s^+) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T & L_1^T \\ L_2^T & -L_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

De (4.134) chega-se a:

$$\Psi(z_s^-) = \begin{bmatrix} \Gamma_s D_s \\ D_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T S_A + L_1^T S_B \\ L_2^T S_A - L_1^T S_B \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

A Equação (4.138) pode ser propagada a partir de  $z_s^-$  para cima através das camadas utilizando-se de (4.46) e respeitando-se a condição de salto dada em (4.48) para as fronteiras entre as camadas. Isto é feito repetidas vezes até que se chegue um pouco abaixo da interface Terra/Ar ( $z = 0^+$ ).

Percebe-se que na Equação (4.138) todos os termos são conhecidos, exceto  $D_s$ . As duas condições de fronteira para a superfície livre  $z = 0$  podem ser utilizadas para determinar as duas incógnitas de  $D_s$ . Para tal finalidade admite-se que a fonte se localiza abaixo da interface Terra/Ar, ou seja, em  $0 < z_s < z_1$ . Veja a figura Figura 8.

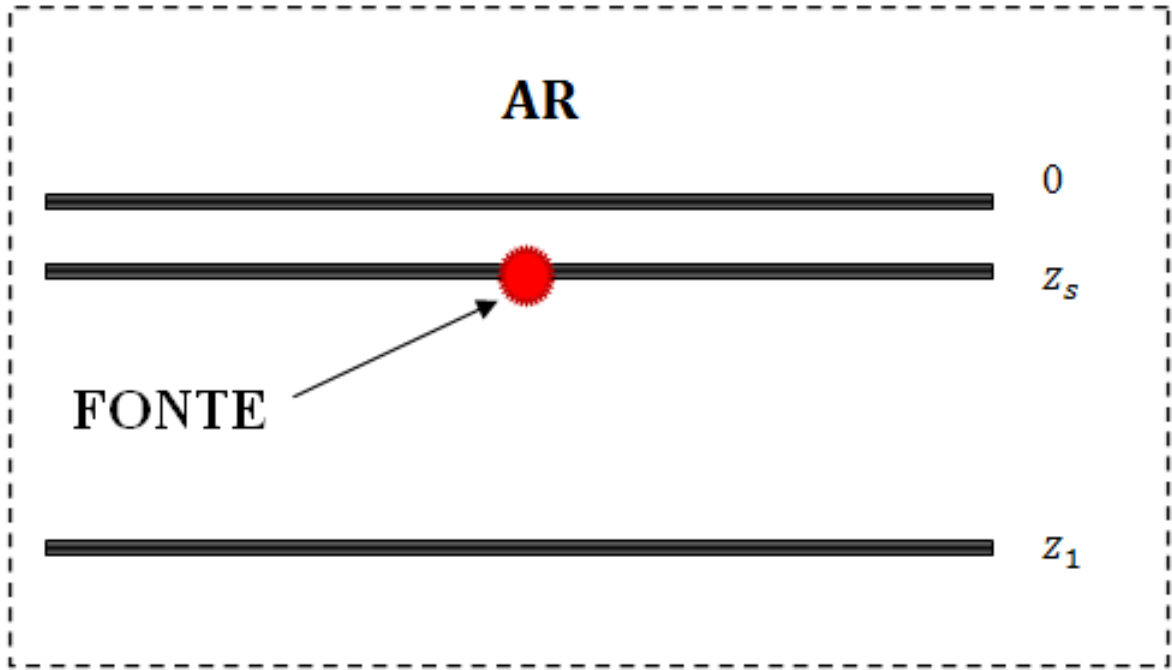


Figura 8: Fonte localizada abaixo da interface Terra/Ar

Foi visto em (4.45) que dada a solução em um ponto  $z_0$  que se encontra na mesma camada onde se encontra  $z$ , a solução  $\Psi(z)$  é a seguinte:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_0)}\Psi(z_0) \quad (4.139)$$

Logo em  $z = 0^+$  tem-se que:

$$\Psi(0^+) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(0^+-z_s^-)}\Psi(z_s^-) \quad (4.140)$$

Pelo fato de  $z_s^-$  estar bem próximo de  $z_s$ , pode-se então dizer que  $0^+ - z_s^- = 0^+ - z_s = -z_s$ , logo:

$$\Psi(0^+) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(-z_s)}\Psi(z_s^-) = \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\Lambda z_s} \end{bmatrix} \Psi(z_s^-) \quad (4.141)$$

Substituindo-se a Equação (4.138) em (4.141), obtém-se:

$$\Psi(0^+) = \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

Utiliza-se agora a seguinte expressão (AZEREDO, 2013):

$$\Phi(0^+) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A \Phi_g \\ \mathbf{G}_B \Phi_g \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

Onde  $\Phi_g$  é um vetor de dimensão 2, formado por incógnitas em  $z = 0$ . E além disso,  $\mathbf{G}_A$  e  $\mathbf{G}_B$  são matrizes  $2 \times 2$ .

Foi visto em (4.14) que:

$$\Phi = \begin{bmatrix} v \\ -q \\ \sigma \\ p_f \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

E das condições de fronteira para a superfície livre  $z = 0$  vistas em (4.5), sabe-se que:

$$\sigma = p_f = 0 \quad (4.145)$$

Assim, pode-se dizer que:

$$\Phi(0^+) = \begin{bmatrix} v \\ -q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Logo:

$$\Phi_g = \begin{bmatrix} v \\ -q \end{bmatrix}_{z=0^+} \quad (4.147)$$

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Sendo assim é possível verificar a validade da equação (4.143).

Foi visto em (4.41) que:

$$\Phi = L\Psi \quad (4.150)$$

Utilizando-se desta equação, pode-se dizer então que:

$$\Phi(0^+) = L\Psi(0^+) \quad (4.151)$$

Substituindo-se as Equações (4.31), (4.142) e (4.143) em (4.151):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A \Phi_g \\ \mathbf{G}_B \Phi_g \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 & -\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \\ e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.152) \end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_A \Phi_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{L}_1 e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + \mathbf{L}_1 e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \\ &\quad \frac{1}{2} [\mathbf{L}_1 e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) + \mathbf{L}_1 e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (4.153) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_B \Phi_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{L}_2 e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s - \mathbf{L}_2 e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \\ &\quad \frac{1}{2} [\mathbf{L}_2 e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) - \mathbf{L}_2 e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (4.154) \end{aligned}$$

Lembrando-se da Equação (4.28) multiplica-se então (4.153) por  $\mathbf{L}_2^T$  e (4.154) por  $\mathbf{L}_1^T$  e obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A \Phi_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \\ &\quad \frac{1}{2} [e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) + e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (4.155) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B \Phi_g &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s - e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s) + \\ &\frac{1}{2} [e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) - e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \end{aligned} \quad (4.156)$$

Somando-se (4.155) e (4.156) chega-se à seguinte expressão:

$$(\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) \Phi_g = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \quad (4.157)$$

E subtraindo-se (4.156) de (4.155) chega-se a:

$$(\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) \Phi_g = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\omega\Lambda z_s} \mathbf{D}_s + e^{-i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \quad (4.158)$$

Multiplica-se então pela esquerda a Equação (4.158) por  $e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega\Lambda z_s}$  e obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) \Phi_g &= \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + \\ &e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) \end{aligned} \quad (4.159)$$

A partir de (4.158) pode-se encontrar  $\mathbf{D}_s$ :

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) \Phi_g - (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \quad (4.160)$$

Onde  $\Phi_g$  pode ser encontrado subtraindo-se (4.157) de (4.159):

$$\begin{aligned} \Phi_g &= [e^{i\omega\Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega\Lambda z_s} (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B) - (\mathbf{L}_2^T \mathbf{G}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{G}_B)]^{-1} e^{i\omega\Lambda z_s} \\ &[\Gamma_s (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A - \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B) - (\mathbf{L}_2^T \mathbf{S}_A + \mathbf{L}_1^T \mathbf{S}_B)] \end{aligned} \quad (4.161)$$

Para um caso particular, quando a fonte está justamente abaixo da superfície, ou seja, para o caso quando  $z_s \approx 0$ , tem-se que:

$$\Phi_g = [(\Gamma_s - I) L_2^T G_A - (\Gamma_s + I) L_1^T G_B]^{-1} [(\Gamma_s - I) L_2^T S_A - (\Gamma_s + I) L_1^T S_B] \quad (4.162)$$

Percebe-se então que pode-se encontrar todas as condições iniciais em  $z = 0$ .

A partir de  $\Phi_g$  pode-se encontrar também  $D_s$  e  $U_s = \Gamma_s D_s$ , obtendo-se a solução logo abaixo da fonte, de acordo com a Equação (4.134).

A solução  $\Phi$  pode ser teoricamente computada em qualquer outro lugar utilizando-se a propagação através das camadas a partir de (4.46) e respeitando-se as condições de salto nas fronteiras entre as camadas de acordo com (4.49) e (4.50). Porém, a propagação de uma onda ascendente contínua no sentido descendente é numericamente instável usando-se (4.46) porque as exponenciais complexas crescem ao invés de diminuir com a distância (AZEREDO, 2013). Assim, deve-se obter  $U$  a partir de  $D$  utilizando-se  $\Gamma_m$  ou as matrizes de transmissão  $T_m$ .

#### 4.5.1 Solução Com a Presença de Fonte: Meio Homogêneo

Na seção (4.5), deu-se início ao processo de resolução do sistema das equações de Biot-JKD, considerando o caso com a presença de fonte e meio estratificado.

Nesta subseção, apresenta-se a solução para o problema levando-se em consideração a presença de uma fonte em um meio homogêneo, como pode ser visto na Figura (9).

Da Equação (4.139) sabe-se que:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_0)} \Psi(z_0) \quad (4.163)$$

Para o caso homogêneo, considera-se que  $z_0 = 0 \approx 0^+$ . Logo:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}z} \Psi(0^+) \quad (4.164)$$

Mas de (4.141) sabe-se que:

$$\Psi(0^+) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(-z_s)} \Psi(z_s^-) \quad (4.165)$$

Logo:



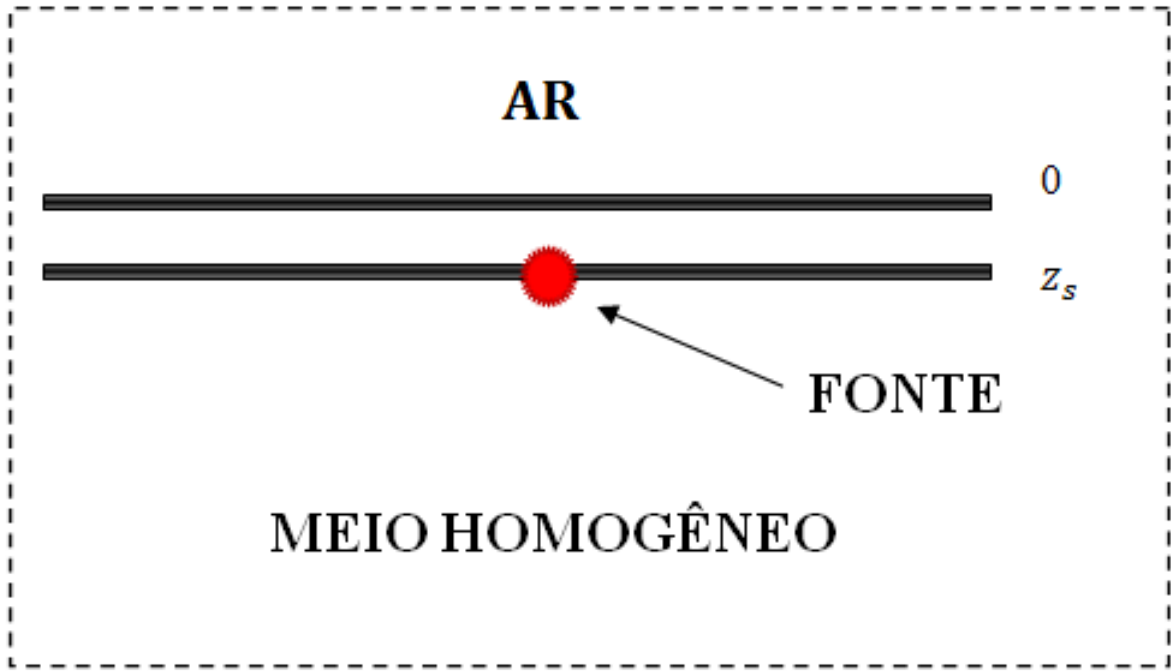


Figura 9: Fonte localizada abaixo da interface Terra/Ar em um meio homogêneo

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_s)}\Psi(z_s^-) \quad (4.166)$$

Em (4.138) verifica-se que:

$$\Psi(z_s^-) = \begin{bmatrix} \Gamma_s D_s \\ D_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T S_A + L_1^T S_B \\ L_2^T S_A - L_1^T S_B \end{bmatrix} \quad (4.167)$$

Então, substituindo-se (4.167) em (4.166) chega-se a:

$$\Psi(z) = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_s)} \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_s D_s \\ D_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T S_A + L_1^T S_B \\ L_2^T S_A - L_1^T S_B \end{bmatrix} \right\} \quad (4.168)$$

Além disso, através de (4.41) sabe-se que  $\Phi = L\Psi$ , logo, para um meio homogêneo tem-se que a solução  $\Phi$  é a seguinte:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_1 & L_1 \\ L_2 & -L_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-i\omega\tilde{\Lambda}(z-z_s)} \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_s D_s \\ D_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^T S_A + L_1^T S_B \\ L_2^T S_A - L_1^T S_B \end{bmatrix} \right\} \quad (4.169)$$

Através das equações desenvolvidas, procura-se uma expressão explícita para cada elemento da solução  $\Phi$ :  $v$ ,  $q$ ,  $\sigma$  e  $p_f$ , como pode se verificar em (4.14).

Devido ao fato do vetor  $S$  depender do tipo de fonte que está sendo usado, utiliza-se de expressões genéricas para as fontes do tipo  $S_0$  e  $S_1$ :

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \\ S_{04} \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

Seja:

$$\varpi = y_{11} [i\omega S_{11} (-\beta M - \beta C) - S_{01}] + y_{21} \{i\omega S_{12} [-\beta C - \beta (\lambda + 2G)] - S_{02}\} + b_{11} [i\omega S_{13} (\rho - \rho_f) - S_{03}] + b_{21} \{i\omega S_{14} [-\rho_f + \gamma(\omega)] - S_{04}\} \quad (4.172)$$

$$\varrho = y_{12} [i\omega S_{11} (-\beta M - \beta C) - S_{01}] + y_{22} \{i\omega S_{12} [-\beta C - \beta (\lambda + 2G)] - S_{02}\} + b_{12} [i\omega S_{13} (\rho - \rho_f) - S_{03}] + b_{22} \{i\omega S_{14} [-\rho_f + \gamma(\omega)] - S_{04}\} \quad (4.173)$$

$$\varsigma = y_{11} [i\omega S_{11} (-\beta M - \beta C) - S_{01}] + y_{21} \{i\omega S_{12} [-\beta C - \beta (\lambda + 2G)] - S_{02}\} - b_{11} [i\omega S_{13} (\rho - \rho_f) - S_{03}] - b_{21} \{i\omega S_{14} [-\rho_f + \gamma(\omega)] - S_{04}\} \quad (4.174)$$

$$\vartheta = y_{12} [i\omega S_{11} (-\beta M - \beta C) - S_{01}] + y_{22} \{i\omega S_{12} [-\beta C - \beta (\lambda + 2G)] - S_{02}\} - b_{12} [i\omega S_{13} (\rho - \rho_f) - S_{03}] - b_{22} \{i\omega S_{14} [-\rho_f + \gamma(\omega)] - S_{04}\} \quad (4.175)$$

Após cálculos, chega-se às expressões finais para a solução do sistema das

equações de Biot-JKD em um meio homogêneo com a presença de fonte:

$$v = \frac{1}{2} \left[ \varpi b_{11} e^{-i\omega q_1(z-z_s)} + \varrho b_{12} e^{-i\omega q_2(z-z_s)} + b_{11} e^{i\omega q_1(z-z_s)} (\varpi e^{2i\omega q_1 z_s} - \varpi + \varsigma) + b_{12} e^{i\omega q_2(z-z_s)} (\varrho e^{2i\omega q_2 z_s} - \varrho + \vartheta) \right] \quad (4.176)$$

$$q = -\frac{1}{2} \left[ \varpi b_{21} e^{-i\omega q_1(z-z_s)} + \varrho b_{22} e^{-i\omega q_2(z-z_s)} + b_{21} e^{i\omega q_1(z-z_s)} (\varpi e^{2i\omega q_1 z_s} - \varpi + \varsigma) + b_{22} e^{i\omega q_2(z-z_s)} (\varrho e^{2i\omega q_2 z_s} - \varrho + \vartheta) \right] \quad (4.177)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[ \varpi y_{11} e^{-i\omega q_1(z-z_s)} + \varrho y_{12} e^{-i\omega q_2(z-z_s)} - y_{11} e^{i\omega q_1(z-z_s)} (\varpi e^{2i\omega q_1 z_s} - \varpi + \varsigma) - y_{12} e^{i\omega q_2(z-z_s)} (\varrho e^{2i\omega q_2 z_s} - \varrho + \vartheta) \right] \quad (4.178)$$

$$p_f = \frac{1}{2} \left[ \varpi y_{21} e^{-i\omega q_1(z-z_s)} + \varrho y_{22} e^{-i\omega q_2(z-z_s)} - y_{21} e^{i\omega q_1(z-z_s)} (\varpi e^{2i\omega q_1 z_s} - \varpi + \varsigma) - y_{22} e^{i\omega q_2(z-z_s)} (\varrho e^{2i\omega q_2 z_s} - \varrho + \vartheta) \right] \quad (4.179)$$

## 4.6 Solução no Espaço Original

Ao iniciar todo o processo de resolução das equações de Biot-JKD, foi necessário aplicar a transformada de Fourier direta simples nas equações, passando-se do domínio do tempo para o da frequência.

Dessa forma, para que seja possível obter a solução do sistema de equações no domínio original, precisa-se "desfazer" esta transformação.

Para tal objetivo, é necessário fazer o uso da *transformada inversa de Fourier*, representada pela seguinte expressão:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.180)$$

## 4.7 Simulação da Propagação das Ondas Elásticas em Meio Homogêneo

Para se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado, foi implementado um código computacional, em MatLab, com o objetivo de fazer simulações da propagação de ondas elásticas. Veja o algoritmo desenvolvido previamente no Apêndice B.

O código computacional criado é capaz de calcular a solução do sistema de Biot-JKD para um meio homogêneo com a presença de fonte. Veja o código no Apêndice D.

### 4.7.1 Dados da Simulação Numérica

Para a realização da simulação numérica considerou-se uma fonte do tipo pontual vertical representada por uma função composta de senoides truncadas, representada pela seguinte expressão no domínio do tempo (BLANC *et al.*, 2013):

$$g(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega_d t) - \frac{21}{32}\text{sen}(2\omega_d t) + \frac{63}{768}\text{sen}(4\omega_d t) - \frac{1}{512}\text{sen}(8\omega_d t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{f_d} \\ 0, & \text{para caso contrário} \end{cases} \quad (4.181)$$

Onde  $f_d$  é a frequência dominante da fonte em *Hertz* e  $\omega_d$  a *frequência dominante* em *rad/s*, relacionadas pela equação:

$$\omega_d = 2\pi f_d \quad (4.182)$$

Aplicando-se a transformada de fourier na Equação (4.181), para quando  $0 \leq t \leq \frac{1}{f_d}$ , chega-se à expressão matemática da fonte no domínio da frequência:

$$G(\omega) = \omega_d \left( \frac{e^{-i\omega \frac{2\pi}{\omega_d}} - 1}{\omega^2 - \omega_d^2} \right) - \frac{21}{16}\omega_d \left( \frac{e^{-i\omega \frac{2\pi}{\omega_d}} - 1}{\omega^2 - 4\omega_d^2} \right) + \frac{21}{64}\omega_d \left( \frac{e^{-i\omega \frac{2\pi}{\omega_d}} - 1}{\omega^2 - 16\omega_d^2} \right) - \frac{1}{64}\omega_d \left( \frac{e^{-i\omega \frac{2\pi}{\omega_d}} - 1}{\omega^2 - 64\omega_d^2} \right) \quad (4.183)$$

A seguir são apresentados os gráficos da função da fonte no domínio do tempo e

no domínio da frequência. Veja o código computacional desenvolvido para plotar estes gráficos no Apêndice D.

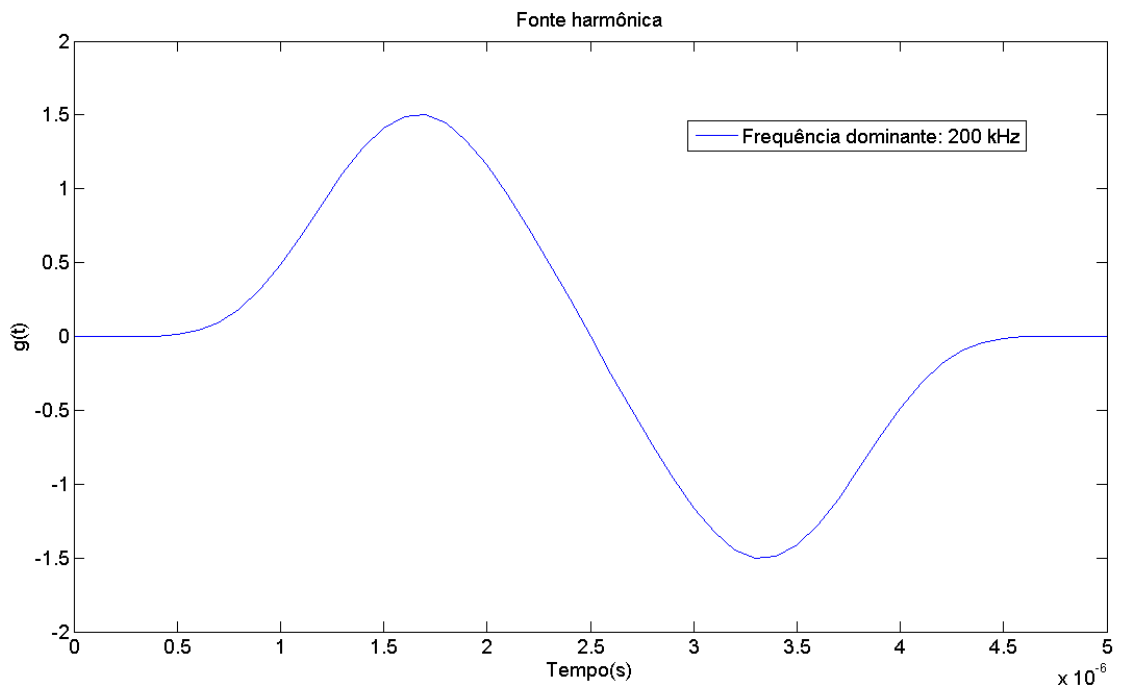


Figura 10: Função da fonte no domínio do tempo

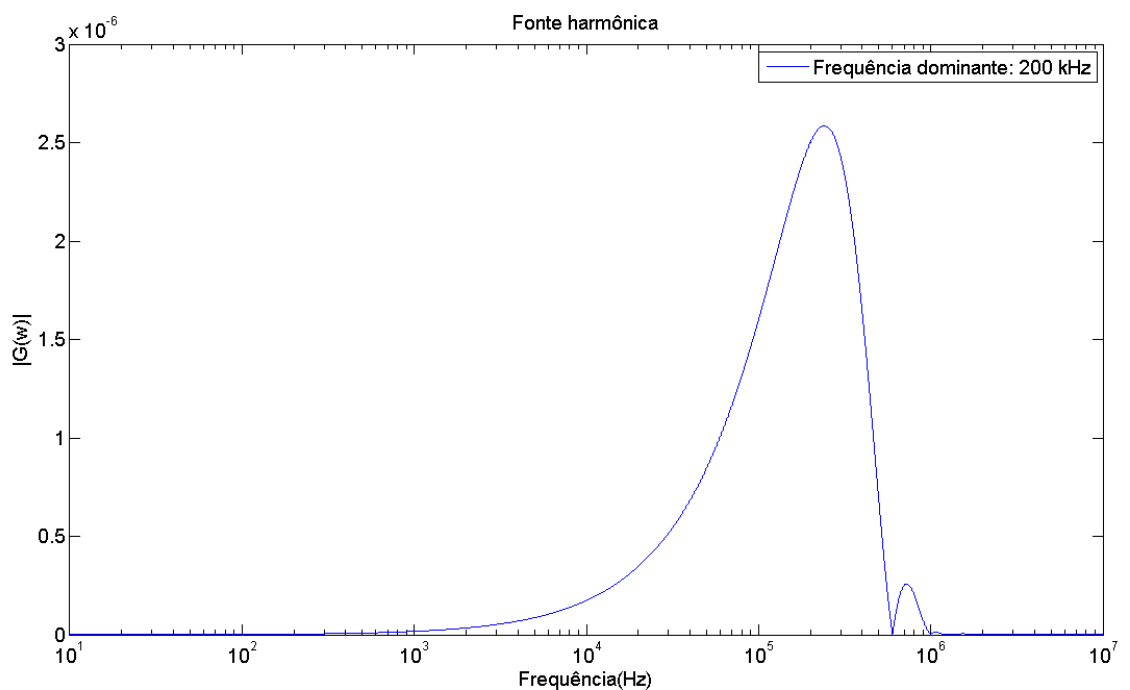


Figura 11: Função da fonte no domínio da frequência

Para realizar a simulação considerou-se a fonte posicionada na superfície ( $z_s = 0$ ) e variou-se a posição do receptor em subsuperfície. A frequência dominante da

fonte utilizada foi  $200\text{ kHz}$ . As propriedades do meio poroso e do fluido utilizadas na simulação são apresentadas na Tabela 1 (BLANC *et al.*, 2013).

Tabela 1: Propriedades do meio poroso e do fluido

Propriedade	Símbolo	Unidade	Valor
Massa específica do fluido	$\rho_f$	$kg/m^3$	1000
Viscosidade do fluido	$\eta$	$Pa.s$	$1 \times 10^{-3}$
Massa específica da parte sólida	$\rho_s$	$kg/m^3$	2644
Módulo de cisalhamento	$G$	$Pa$	$7,04 \times 10^9$
Porosidade	$\phi$	<i>Adimensional</i>	0,2
Tortuosidade	$a$	<i>Adimensional</i>	2,4
Permeabilidade	$k$	$m^2$	$3,6 \times 10^{-13}$
Parâmetro de Lamé	$\lambda$	$Pa$	$1,06 \times 10^{10}$
Módulo de Biot	$M$	$Pa$	$9,7 \times 10^9$
Módulo de Biot	$C$	<i>Adimensional</i>	0,72
Comprimento viscoso característico	$\nu$	$m$	$5,88 \times 10^{-6}$

## **5      *Resultados e Análises***

Neste capítulo são apresentados os resultados encontrados na simulação, na forma de gráficos da solução do sistema de Biot-JKD, bem como a análise desses resultados.

Foram plotados gráficos do comportamento da velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida, da velocidade de filtração de Darcy (fase líquida), da tensão e da pressão no fluido em relação ao tempo. Veja o código computacional desenvolvido para plotar estes gráficos no Apêndice C.

A solução foi encontrada para três profundidades distintas a fim de se observar sua propagação. No primeiro caso considerou-se que o receptor estava na posição  $z = 0,02 m$ , no segundo caso  $z = 0,06 m$  e no terceiro  $z = 0,1 m$ .

## 5.1 Resultados para o Caso 1

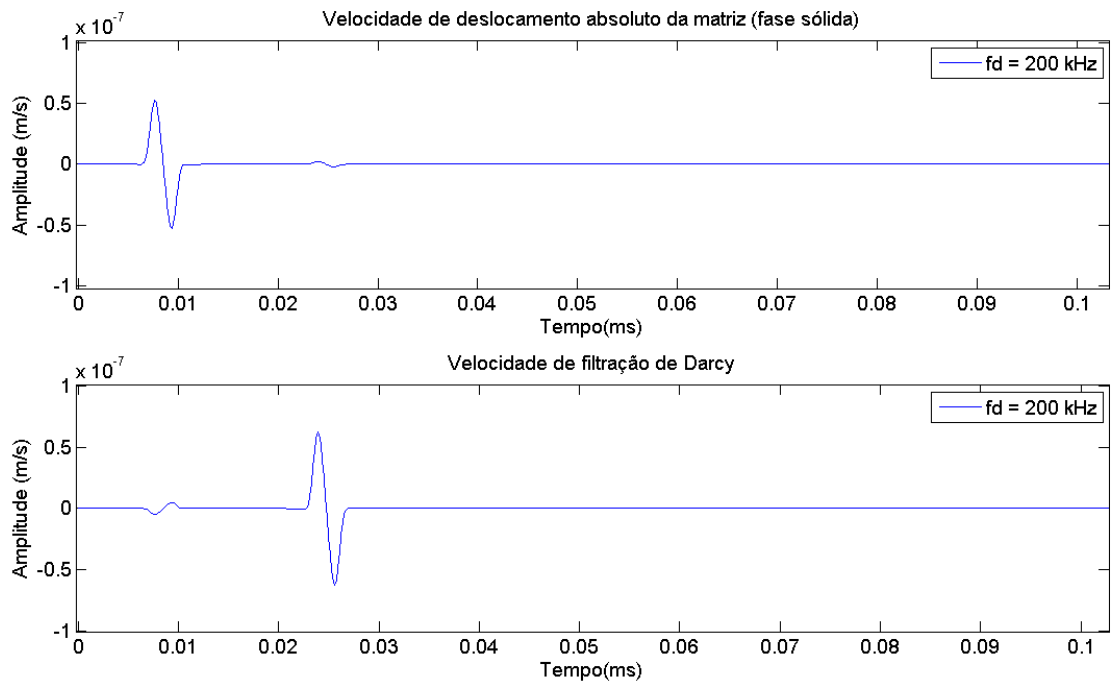


Figura 12: Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a  $0,02\text{ m}$

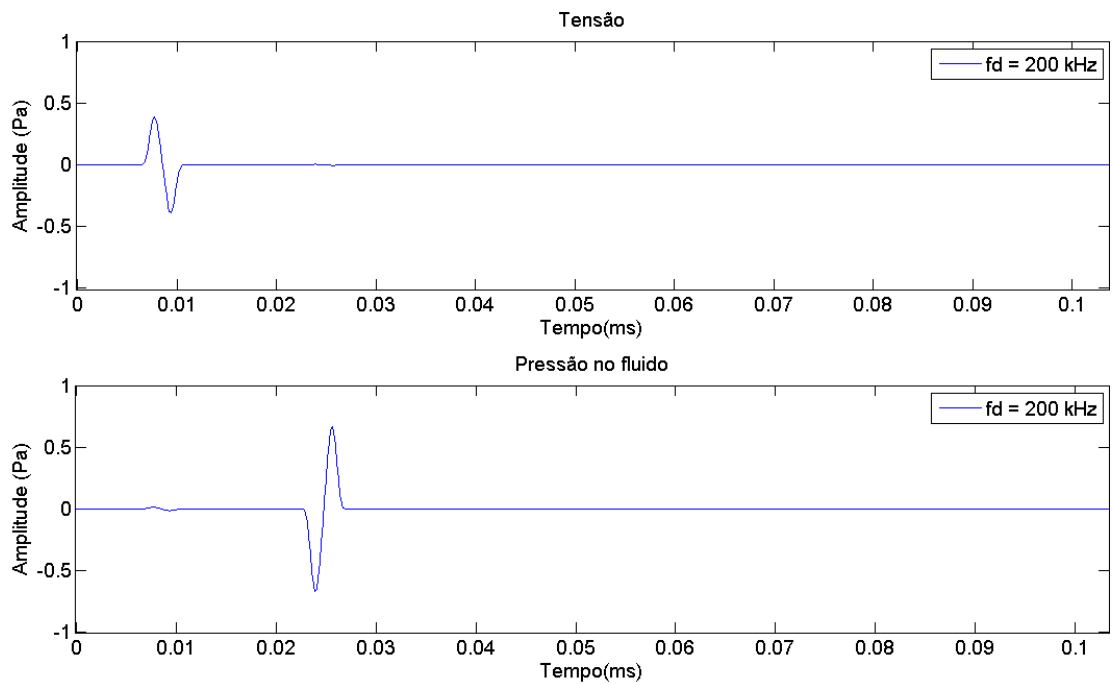


Figura 13: Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a  $0,02\text{ m}$



## 5.2 Resultados para o Caso 2

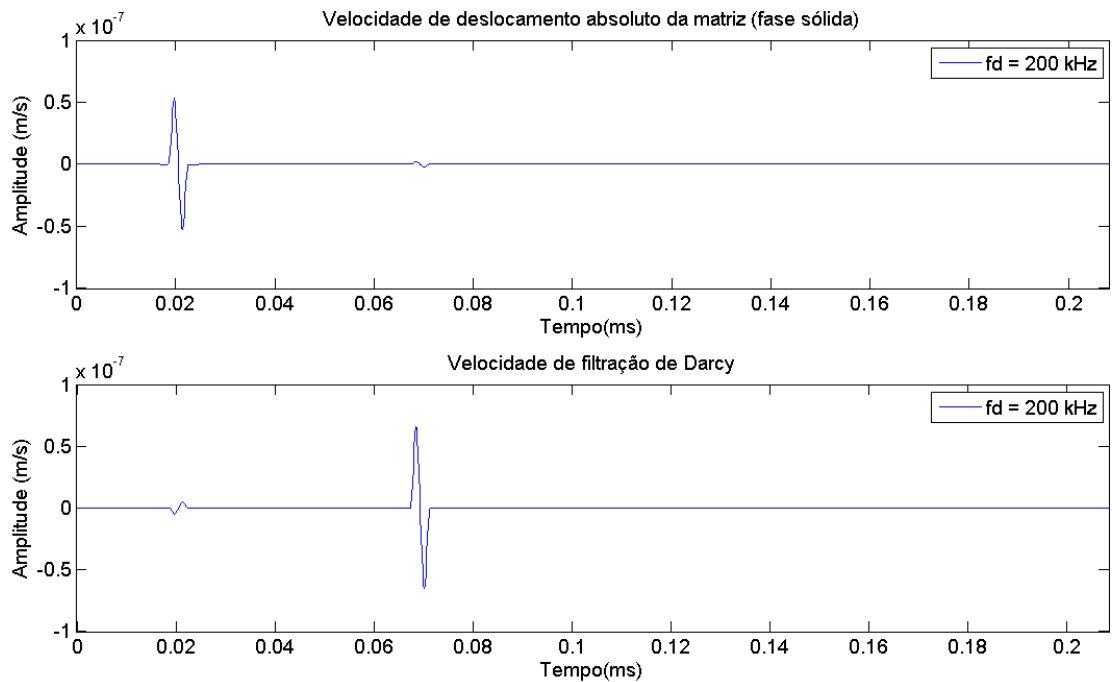


Figura 14: Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a  $0,06\text{ m}$

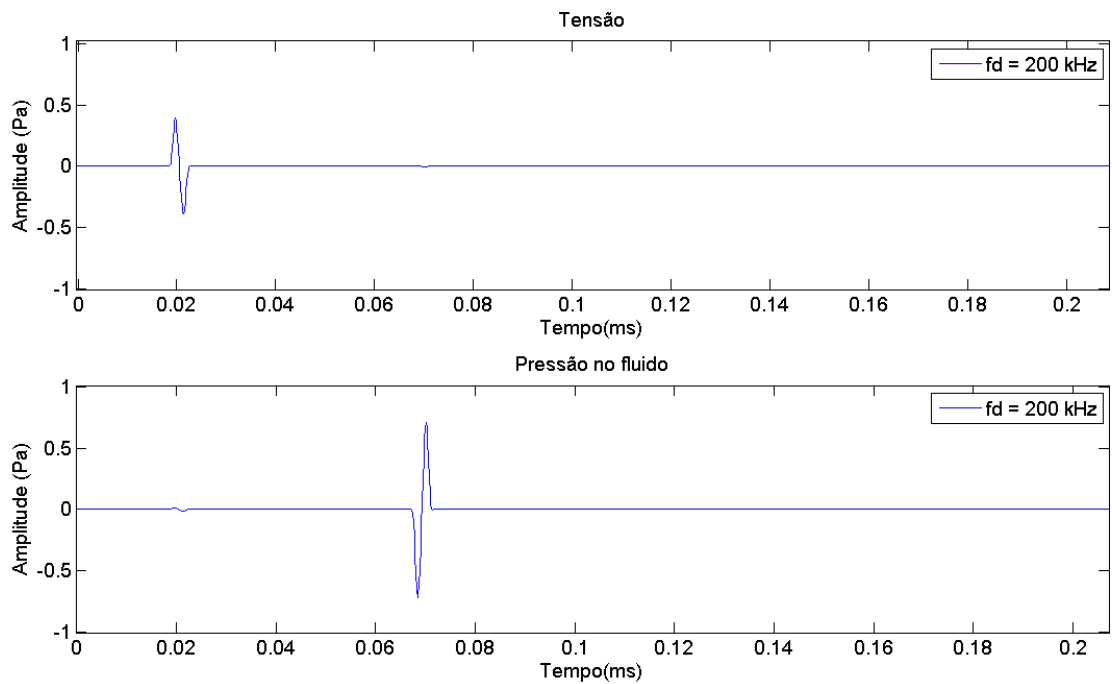


Figura 15: Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a  $0,06\text{ m}$

### 5.3 Resultados para o Caso 3

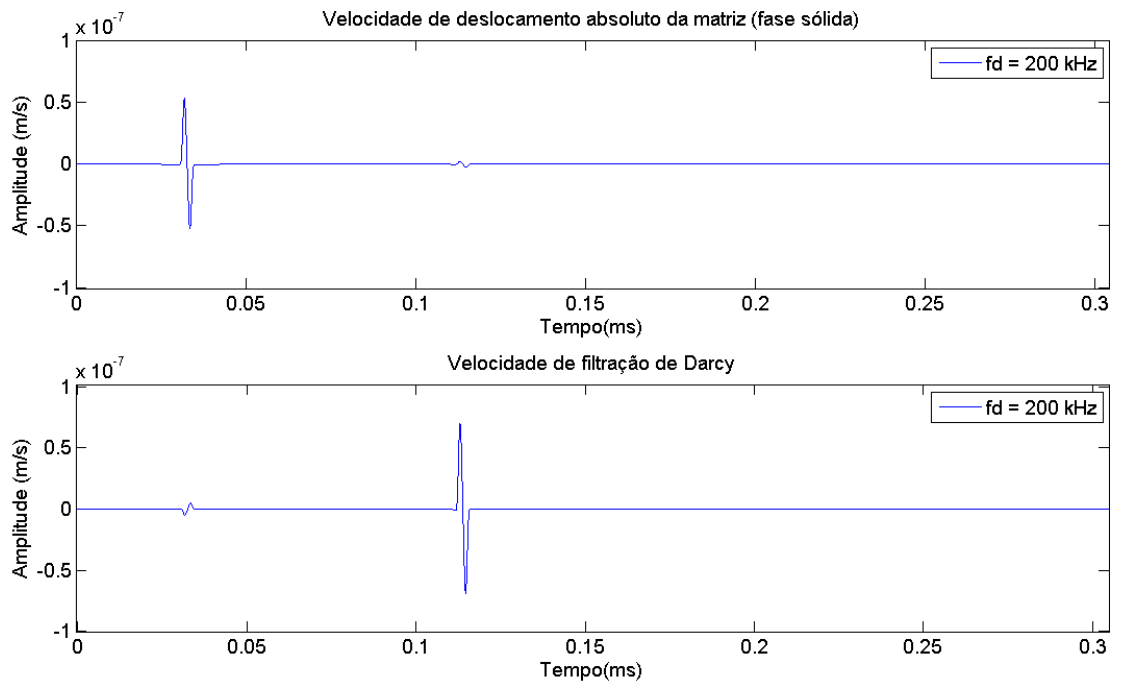


Figura 16: Velocidade de deslocamento absoluto da fase sólida e velocidade de filtração de Darcy para a profundidade do receptor igual a  $0,1\ m$

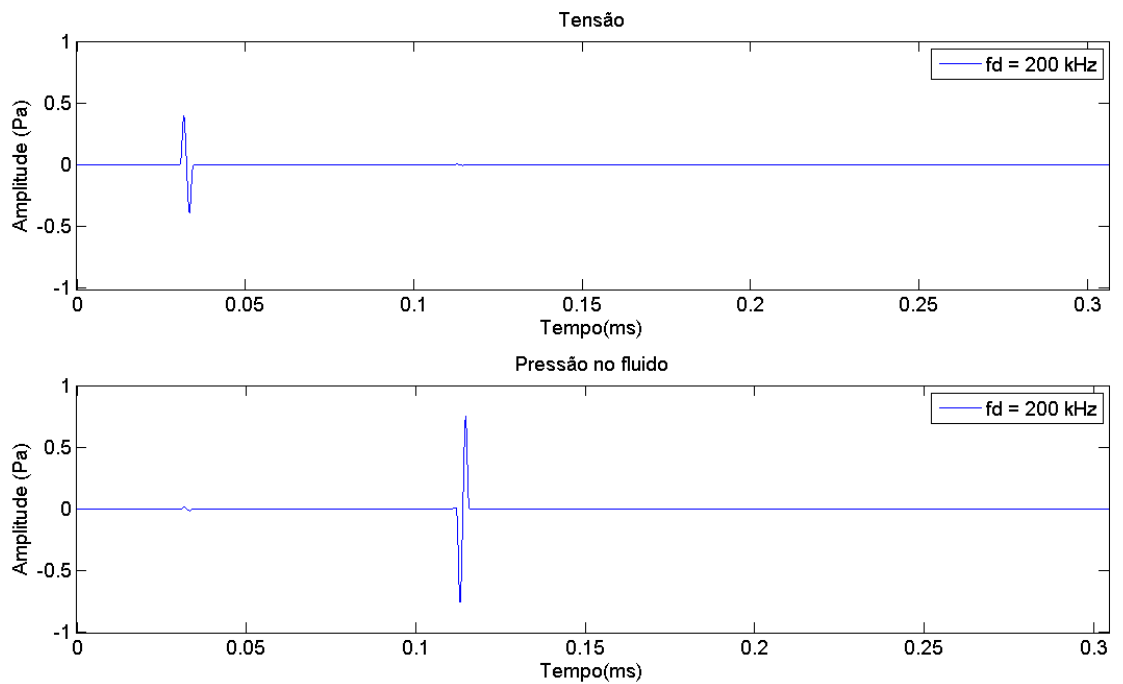


Figura 17: Tensão e pressão no fluido para a profundidade do receptor igual a  $0,1\ m$

## 5.4 Análise dos Resultados

Analisando-se as Figuras 12 - 17 percebe-se que à medida que a distância fonte-receptor aumenta, passando de 0,02 metros para 0,06 metros e por último para 0,1 metros o tempo de chegada da onda sísmica também aumenta de forma proporcional, indicando que, como esperado, a onda sísmica se propaga com velocidade constante no meio homogêneo.

Como visto no Capítulo 1, segundo (BIOT, 1956b), para a propagação de ondas elásticas em um meio poroso saturado para altas frequências surgem duas ondas compressoriais (rápida e lenta) e uma cisalhante. Sendo que a onda compressional rápida corresponde ao movimento no qual o deslocamento da fase sólida e da fase fluida estão em fase, enquanto que a onda compressional lenta é uma onda difusiva que corresponde ao movimento no qual os deslocamentos das fases sólida e fluida não estão em fase. Como o meio considerado na simulação é unidimensional (1D), não há a presença da onda cisalhante, sendo possível visualizar apenas as ondas compressoriais rápida e lenta que correspondem, respectivamente, ao primeiro e ao segundo pulso de onda presentes nas Figuras 12 - 17.

Com o tempo de chegada da onda ao receptor, observado graficamente a partir das Figuras 12 - 17, pode-se calcular um *valor estimado* para a velocidade de propagação da onda no meio poroso utilizando-se da equação:

$$c_p = \frac{z - z_s}{t_c} \quad (5.1)$$

Onde  $c_p$  é a velocidade de propagação da onda compressional (rápida ou lenta),  $(z - z_s)$  é a distância fonte-receptor e  $t_c$  é o tempo de chegada da onda ao receptor.

Segundo (BLANC *et al.*, 2013), para o meio que apresenta as propriedades presentes na Tabela 1, a velocidade da onda compressional rápida é  $3269,89 \text{ m/s}$  e a velocidade da onda compressional lenta é  $814,95 \text{ m/s}$ . Estes valores são próximos aos estimados utilizando-se a Equação (5.1), o que indica a eficiência do algoritmo criado. Veja a Tabela 2.

Tabela 2: Velocidades das ondas compressoriais rápida e lenta para os três casos simulados considerando-se um meio homogêneo

Tipo de onda	$z - z_s = 0,02 m$	$z - z_s = 0,06 m$	$z - z_s = 0,1 m$
Compressional rápida	$3200,0 m/s$	$3243,2 m/s$	$3278,7 m/s$
Compressional lenta	$869,6 m/s$	$888,9 m/s$	$892,9 m/s$

## 6 Conclusões

Apresenta-se neste capítulo as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho foi desenvolvido um estudo da teoria clássica de Biot, elaborada em meados da década 1950, que descreve teoricamente a propagação de ondas elásticas através de um meio poroso que contém fluidos.

A teoria da poroelasticidade é aplicada nos casos de materiais porosos preenchidos por fluidos, sendo de grande interesse em muitas aplicações da engenharia de petróleo, como por exemplo, na exploração e caracterização de reservatórios de óleo/gás, detecção de hidrato de gás, monitoramento sísmico de armazenamento de  $CO_2$  e hidrogeologia.

Neste trabalho, considerou-se o caso das altas frequências e assumiu-se que os poros do meio poroso estão interconectados e totalmente saturados por um fluido; além disso, considerou-se o caso da permeabilidade dinâmica, quando ela depende da frequência temporal, proposta por Johnson, Koplik e Dashen (JKD) em 1987.

O objetivo principal deste trabalho foi simular, considerando-se um problema misto para o sistema de Biot-JKD, a resposta poroelástica de um meio poroso delgado 1D e realizar uma análise numérico-analítica da influência da variação dos parâmetros físicos e petrofísicos do meio na solução do problema.

A metodologia deste trabalho baseou-se na teoria da poroelasticidade moderna (teoria de Biot-JKD), na teoria das equações diferenciais parciais e ordinárias, no formalismo de Ursin, em álgebra linear, em métodos numéricos e em programação utilizando-se o MatLab.

Após reduzir o sistema das equações de Biot-JKD para o caso 1D, transformou-se as equações do domínio do tempo para o domínio da frequência, utilizando-se da

transformada de Fourier. Em seguida, baseando-se no formalismo de Ursin, escreveu-se o sistema das equações diferenciais parciais como um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, decompondo-se a solução analítica do sistema em duas partes: ondas ascendentes e ondas descendentes.

Apresentou-se então a solução analítica desenvolvida para o sistema das equações de Biot-JKD considerando-se a presença de fonte em um meio poroso homogêneo. Com o intuito de se obter a validação da solução encontrada, foi implementado um código computacional capaz de calcular a solução do sistema de equações. Para a realização da simulação, considerou-se uma fonte do tipo pontual vertical, representada por uma função composta de senoides truncadas, com frequência dominante de 200 kHz.

Como previsto na teoria de Biot, para a propagação de ondas elásticas em um meio poroso saturado para altas frequências surgem duas ondas compressoriais (rápida e lenta) e uma cisalhante, sendo que a onda compressional rápida corresponde ao movimento no qual o deslocamento da fase sólida e da fase fluida estão em fase, enquanto que a onda compressional lenta é uma onda difusiva que corresponde ao movimento no qual os deslocamentos das fases sólida e fluida não estão em fase. Como o meio poroelástico considerado na simulação é unidimensional (1D), não há a presença da onda cisalhante, sendo possível visualizar apenas as ondas compressoriais rápida e lenta.

Um programa computacional foi desenvolvido e o algoritmo criado pôde ser validado através de simulações, além disso, os resultados obtidos nas simulações confirmaram a efetividade do método proposto. O algoritmo desenvolvido serve como base para a criação de métodos de resolução de problemas inversos associados com a caracterização de parâmetros petrofísicos de reservatórios.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Elaboração de um programa computacional para simulação da propagação das ondas elásticas em meios porosos 1D *estratificados*, baseando-se no método apresentado neste trabalho;
- Desenvolvimento de um método para encontrar a solução de problemas inversos associados com a caracterização de parâmetros petrofísicos de reservatórios;
- Baseando-se na metodologia apresentada neste trabalho, obter a resposta poroelástica de um meio poroso 3D.





## **Referências**

AZEREDO, M. M. *Modelagem Matemática e Computacional da Propagação de Ondas Sísmicas em Meios Poroelásticos Estratificados*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Maio 2013.

BIOT, M. A. Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge. *Ann. Soc. Sci.*, p. 110–113, 1935.

BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 28, n. 2, p. 168–178, March 1956.

BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 28, n. 2, p. 179–191, March 1956.

BIOT, M. A.; WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 594–601, December 1957.

BLANC, E. *Time-Domain Numerical Modeling of Poroelastic Waves: the Biot-JKD Model with Fractional Derivatives*. Tese (Doutorado) — Aix-Marseille Université, December 2013.

BLANC, E.; CHIAVASSA, G.; LOMBARD, B. Biot-jkd model: Simulation of 1d transient poroelastic waves with fractional derivatives. *Journal of Computational Physics*, v. 237, p. 1–20, 2013.

CARCIONE, J. M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*. Second. [S.l.]: Elsevier, 2007.

DARCY, H. Les fontaines publiques de la ville de dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau. *Victor Dalmont*, 1856.

FRENKEL, M. I. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in saturated soils. v. 8, n. 4, p. 133–150, 1944.

JOHNSON, D. L.; KOPLIK, J.; DASHEN, R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *J. Fluid Mech.*, v. 176, p. 379–402, 1987.

MASSON, Y. J.; PRIDE, S. R. Finite-difference modeling of biot's poroelastic equations across all frequencies. *Geophysics*, v. 75, n. 2, p. N33–N41, March-April 2010.

PLONA, T. J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *App. Phys. Lett.*, v. 36, n. 4, p. 259–261, 1980.

PLYUSHCHENKOV, B. D.; TURCHANINOV. Acoustic logging modeling by refined biot's equations. *International Journal of Modern Physics*, v. 12, p. 305–396, 2000.

PRIDE, S. R.; BERRYMAN, J. G.; HARRIS, J. M. Seismic attenuation due to wave-induced flow. *Journal of Geophysical Research*, v. 109, n. B01201, p. 1–19, January 2004.

PRIDE, S. R.; F.GANGI, A.; MORGAN, F. D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 92, n. 6, p. 3278–3290, December 1992.

RICE, J. R.; CLEARY, M. P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Rev. Geophysics*, v. 14, n. 2, p. 227–241, 1976.

TERZAGHI, K. von. Die berechnung des durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen. p. 105–123, 1923.

URSIN, B. Review of elastic and eletromagnetic wave propagation in horizontally layered media. *Geophysics*, v. 48, n. 8, p. 1063–1081, August 1983.

WHITE, B. S.; ZHOU, M. Electro seismic prospecting in layered media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 67, n. 1, p. 69–98, November 2006.

## ***APÊNDICE A - Tipos de Fonte***

Descreve-se neste apêndice a formulação matemática dos tipos de fonte utilizados neste trabalho: fonte do tipo dinamite e fonte pontual vertical que pode ser utilizada para modelar uma fonte do tipo martelo, queda de um peso ou uma vibração.

Na modelagem numérica, deve se ter um pouco de cuidado com a escolha do tipo de fonte, visto que a função matemática que irá definir este termo deve ser uma função limitada, tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência, além de ser não nula apenas em uma região do seu domínio. Outra consideração importante é que uma frequência dominante deve ser bem caracterizada (AZEREDO, 2013).

### **A.0.1 Fonte do Tipo Dinamite**

Uma fonte do tipo dinamite exerce uma força nas fases sólida e fluida, dada pela seguinte equação:

$$\tilde{F}(z) = \tilde{f}(z) = -h(\omega) \delta'(z - z_s) \quad (\text{A.1})$$

Onde  $h(\omega)$  é o espectro do momento sísmico  $H(t)$ , o qual representa a função matemática da fonte.

Utiliza-se a Equação (A.1) para encontrar as expressões da fonte do tipo dinamite para o sistema de Biot-JKD, dado pela Equação (4.13).

Então, através da Equação (4.16), sabe-se que o vetor fonte para o sistema será dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{f}_3(z) \\ \tilde{f}_3(z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Logo, substituindo-se (A.1) na equação (A.2), tem-se:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(\omega) \delta'(z - z_s) \\ -h(\omega) \delta'(z - z_s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

O que é o mesmo que:

$$\mathbf{S} = h(\omega) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \delta'(z - z_s) \quad (\text{A.4})$$

Mas, como foi visto na Equação (4.113), sabe-se que a fonte  $\mathbf{S}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \delta(z - z_s) + \mathbf{S}_1 \delta'(z - z_s) \quad (\text{A.5})$$

Assim, comparando-se (A.4) com (A.5), pode-se dizer que:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{S}_1 = h(\omega) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

De acordo com (4.117), sabe-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{bmatrix} = i\omega \mathbf{M} \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0 \quad (\text{A.8})$$

Logo, é possível encontrar  $\mathbf{S}_A$  e  $\mathbf{S}_B$ :

$$\mathbf{S}_A = i\omega \beta h(\omega) \begin{bmatrix} C - M \\ \lambda + 2G - C \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{S}_B = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

## A.0.2 Fonte Pontual Vertical

Considera-se agora a presença de uma fonte que emite uma força pontual vertical. Esta fonte irá provocar uma força na fase sólida e fluida dada pela seguinte equação:

$$\tilde{F}_3(z) = \tilde{f}_3(z) = h(\omega) \delta(z - z_s) \quad (\text{A.11})$$

Substituindo-se (A.11) na Equação (4.16), obtém-se:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} h(\omega) \delta(z - z_s) \quad (\text{A.12})$$

De acordo com (4.113), pode-se dizer que:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} h(\omega) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

Logo:

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} h(\omega) \quad (\text{A.16})$$

## ***APÊNDICE B - Algoritmo: Solução Analítica do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte***

A seguir, apresenta-se o algoritmo desenvolvido, previamente à criação do código computacional, com o objetivo de definir passo-a-passo como será encontrada a solução do sistema de Biot-JKD para um meio homogêneo com a presença de fonte:

1. Determinar os dados de entrada:

(a) Propriedades da camada e do fluido:

- i. Massa específica do fluido ( $\rho_f$ ) –  $[kg/m^3]$ ;
- ii. Viscosidade do fluido ( $\eta$ ) –  $[Pa \cdot s]$ ;
- iii. Massa específica da parte sólida ( $\rho_s$ ) –  $[kg/m^3]$ ;
- iv. Módulo de cisalhamento ( $G$ ) –  $[Pa]$ ;
- v. Porosidade ( $\phi$ ) –  $[Adimensional]$ ;
- vi. Tortuosidade ( $a$ ) –  $[Adimensional]$ ;
- vii. Permeabilidade ( $\kappa$ ) –  $[m^2]$ ;
- viii. Parâmetro de Lamé ( $\lambda$ ) –  $[Pa]$ ;
- ix. Módulo de Biot ( $M$ ) –  $[Pa]$ ;
- x. Módulo de Biot ( $C$ ) –  $[Adimensional]$ ;
- xi. Comprimento viscoso característico ( $\nu$ ) –  $[m]$ ;
- xii. Fator elétrico de formação ( $F$ ) –  $[Adimensional]$ ;
- xiii. Frequência de relaxação ( $\Omega$ ) –  $[Hz]$ ;
- xiv. Limite de permeabilidade para freq. zero ( $\kappa_0$ ) –  $[m^2]$ ;

(b) Frequência dominante da fonte ( $f_d$ ) –  $[Hz]$ ;

(c) Profundidade onde se deseja encontrar a solução  $(z) - [m]$ ;

(d) Profundidade da fonte  $(z_s) - [m]$ ;

2. Cálculo da solução no domínio da frequência temporal:

(a) Definir  $\beta$ ,  $L(\omega)$  e  $\gamma(\omega)$ ;

(b) Calcular os autovalores  $(q_m)$ ;

(c) Definir  $\bar{a}_m$  e  $\xi_m$ ;

(d) Calcular as componentes dos autovetores  $(b_m e y_m)$ ;

(e) Definir as componentes dos vetores de fonte  $(S_0 e S_1)$ ;

(f) Calcular  $\varpi$ ,  $\varrho$ ,  $\varsigma$  e  $\vartheta$ ;

(g) Calcular a solução, ou seja,  $v$ ,  $q$ ,  $\sigma$  e  $p_f$ ;

3. Cálculo da solução no domínio do tempo:

(a) Aplicar a transformada inversa de Fourier;

4. Plotar o gráfico da solução.

## ***APÊNDICE C - Código Computacional: Solução do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte***

Neste apêndice é apresentado o código computacional, elaborado para se obter a validação do desenvolvimento analítico realizado, que calcula a solução do sistema de Biot-JKD para um meio homogêneo com a presença de fonte.

Listing C.1: Solução do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo com a Presença de Fonte.

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4 format long
5
6 %*****%
7 %                DADOS DE ENTRADA                %
8 %*****%
9
10 %Densidade do fluido [Kg/m^3]
11 rhof = 1000;
12 %Viscosidade do fluido [Pa.s]
13 eta = 1.e-3;
14 %Densidade da parte sólida (Grãos) [Kg/m^3]
15 rhos = 2644;
16 %Módulo de cisalhamento [Pa]

```



```

17 G = 7.04e9;
18 %Porosidade
19 phi = 0.2;
20 %Tortuosidade
21 a = 2.4;
22 %Permeabilidade [m^2]
23 k = 3.6e-13;
24 %Parâmetro de Lamé [Pa]
25 lambda = 1.06e10;
26 %Módulo de Biot [Pa]
27 M = 9.7e9;
28 %Módulo de Biot
29 C = 0.720;
30 %Comprimento viscoso característico [m]
31 Lambda = 5.88e-6;
32
33 %Profundidade do receptor [m]
34 z = input('Entre com a profundidade do receptor:');
35 %Posição da fonte [m]
36 zs = 0;
37
38 %*****%
39 %           FONTE HARMÔNICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA           %
40 %*****%
41
42 %Frequência central ou dominante da fonte [Hz]
43 fd = 2.e5;
44 %Frequência central ou dominante da fonte [rad/s]
45 omegad = 2*pi*fd;
46 %Passo de frequência temporal
47 df = input('Entre com o passo de frequência(10, 100 ou 1000Hz
           ):');
48 %Frequência máxima amostral
49 fMax = 6.4e6;
50 %Número de elementos de frequência considerados
51 num = fMax/df;

```

```

52
53 %Frequência amostral (Hz)
54 f = [1:num]*df;
55 %Frequência amostral (rad/s)
56 omega = 2*pi*f;
57
58 for j = 1:num
59
60     h(j) = omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/omegad)-1)/(omega(j)
        ^2 - omegad^2)) - (21/16)*omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)
        /omegad)-1)/(omega(j)^2 - 4*omegad^2)) + (21/64)*
        omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/omegad)-1)/(omega(j)^2 -
        16*omegad^2)) - (1/64)*omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/
        omegad)-1)/(omega(j)^2 - 64*omegad^2));
61
62 end
63
64 %*****%
65 %           SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA TEMPORAL           %
66 %*****%
67
68 %Densidade bulk [Kg/m^3]
69 rho = phi*rhof + (1 - phi)*rhos;
70 %Fator elétrico da formação
71 F = a/phi;
72 %Frequência de relaxação [Hz]
73 Omega = (eta*(phi^2)*(Lambda^2))/(4*(a^2)*(k^2)*rhof);
74 %Limite de permeabilidade para frequência zero
75 k0 = (Lambda^2)/8*F;
76
77 %Definição de parâmetro
78 beta = 1/((C^2) - M*(lambda + 2*G));
79
80 for j = 1:length(f)
81
82     %Definição de parâmetros

```

```

83 Lw(j) = (eta/k0)*(sqrt(Omega + 1i*omega(j)))/sqrt(Omega);
84 gamma(j) = F*rhof - Lw(j)/(1i*omega(j));
85
86 %Cálculo dos autovalores "qm2" onde m = 1 -> Onda
      compressional rápida(Sinal positivo) e m = 2 -> Onda
      compressional lenta(Sinal negativo)
87 q12(j) = beta*(C*rhof - 0.5*M*rho - 0.5*(lambda + 2*G)*
      gamma(j)) + 0.5*beta*sqrt((((lambda + 2*G)*gamma(j) -
      M*rho)^2) - 4*(M*rhof - C*gamma(j))*(C*rho - (lambda +
      2*G)*rhof));
88 q22(j) = beta*(C*rhof - 0.5*M*rho - 0.5*(lambda + 2*G)*
      gamma(j)) - 0.5*beta*sqrt((((lambda + 2*G)*gamma(j) -
      M*rho)^2) - 4*(M*rhof - C*gamma(j))*(C*rho - (lambda +
      2*G)*rhof));
89
90 %Definição de parâmetros -> "xim" e "am" com m = 1, 2.
91 xi1(j) = (C*rhof - M*rho - q12(j)/beta)/(M*rhof - C*gamma
      (j));
92 xi2(j) = (C*rhof - M*rho - q22(j)/beta)/(M*rhof - C*gamma
      (j));
93
94 a1(j) = sqrt((((M^2)*(rhof^2)) - 2*M*rhof*C*gamma(j) + (C
      ^2)*(gamma(j)^2))/((((M^2)*(rhof^2)) + (C^2)*(gamma(j)
      ^2) + (C^2)*(rhof^2) + (M^2)*(rho^2) + (q12(j)^2)/(
      beta^2) - 2*M*rhof*C*gamma(j) - 2*M*rhof*C*rho - 2*
      rhof*C*q12(j)/beta + 2*M*rho*q12(j)/beta));
95 a2(j) = sqrt((((M^2)*(rhof^2)) - 2*M*rhof*C*gamma(j) + (C
      ^2)*(gamma(j)^2))/((((M^2)*(rhof^2)) + (C^2)*(gamma(j)
      ^2) + (C^2)*(rhof^2) + (M^2)*(rho^2) + (q22(j)^2)/(
      beta^2) - 2*M*rhof*C*gamma(j) - 2*M*rhof*C*rho - 2*
      rhof*C*q22(j)/beta + 2*M*rho*q22(j)/beta));
96
97 %Cálculo das componentes dos autovetores -> "bmn" e "ymn
      ", com m = 1, 2 e n = 1, 2.
98 b11(j) = -a1(j);
99 b21(j) = a1(j)*xi1(j);

```

```

100     b12(j) = -a2(j);
101     b22(j) = a2(j)*xi2(j);
102
103     y11(j) = (a1(j)/(sqrt(q12(j))))*(- rho - rhof*xi1(j));
104     y21(j) = (a1(j)/(sqrt(q12(j))))*(rhof + gamma(j)*xi1(j));
105     y12(j) = (a2(j)/(sqrt(q22(j))))*(- rho - rhof*xi1(j));
106     y22(j) = (a2(j)/(sqrt(q22(j))))*(rhof + gamma(j)*xi2(j));
107
108     %Definição das componentes dos vetores de fonte -> "S0n"
        e "S1n", com n = 1, 2, 3, 4.
109     S01(j) = 0;
110     S02(j) = 0;
111     S03(j) = -h(j);
112     S04(j) = h(j);
113
114     S11(j) = 0;
115     S12(j) = 0;
116     S13(j) = 0;
117     S14(j) = 0;
118
119     %Cálculo de parâmetros simplificadores
120     pivavar(j) = y11(j)*(1i*omega(j)*S11(j)*(-beta*M - beta*C)
        - S01(j)) + y21(j)*(1i*omega(j)*S12(j)*(-beta*C - beta
        *(lambda + 2*G)) - S02(j)) + b11(j)*(1i*omega(j)*S13(j)
        *(rho - rhof) - S03(j)) + b21(j)*(1i*omega(j)*S14(j)
        *(-rhof + gamma(j)) - S04(j));
121
122     rhoavar(j) = y12(j)*(1i*omega(j)*S11(j)*(-beta*M - beta*C)
        - S01(j)) + y22(j)*(1i*omega(j)*S12(j)*(-beta*C -
        beta*(lambda + 2*G)) - S02(j)) + b12(j)*(1i*omega(j)*
        S13(j)*(rho - rhof) - S03(j)) + b22(j)*(1i*omega(j)*
        S14(j)*(-rhof + gamma(j)) - S04(j));
123
124     sigmavar(j) = y11(j)*(1i*omega(j)*S11(j)*(-beta*M - beta*
        C) - S01(j)) + y21(j)*(1i*omega(j)*S12(j)*(-beta*C -
        beta*(lambda + 2*G)) - S02(j)) - b11(j)*(1i*omega(j)*

```

```

S13(j)*(rho - rhof) - S03(j)) - b21(j)*(1i*omega(j)*
S14(j)*(-rhof + gamma(j)) - S04(j));
125
126 thetavar(j) = y12(j)*(1i*omega(j)*S11(j)*(-beta*M - beta*
C) - S01(j)) + y22(j)*(1i*omega(j)*S12(j)*(-beta*C -
beta*(lambda + 2*G)) - S02(j)) - b12(j)*(1i*omega(j)*
S13(j)*(rho - rhof) - S03(j)) - b22(j)*(1i*omega(j)*
S14(j)*(-rhof + gamma(j)) - S04(j));
127
128 %Cálculo da solução
129 v(j) = 0.5*(pivar(j)*b11(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(q12(j))
*(z - zs)) + rho var(j)*b12(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(
q22(j))*(z - zs)) + b11(j)*(exp(1i*omega(j)*sqrt(q12(j)
))*(z - zs)))*(pivar(j)*exp(2i*omega(j)*sqrt(q12(j))*
zs) - pivar(j) + sigmavar(j)) + b12(j)*exp(1i*omega(j)*
*sqrt(q22(j))*(z - zs))*(rho var(j)*exp(2i*omega(j)*
sqrt(q22(j))*zs) - rho var(j) + thetavar(j)));
130
131 q(j) = -0.5*(pivar(j)*b21(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(q12(j)
)*(z - zs)) + rho var(j)*b22(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(
q22(j))*(z - zs)) + b21(j)*(exp(1i*omega(j)*sqrt(q12(j)
))*(z - zs)))*(pivar(j)*exp(2i*omega(j)*sqrt(q12(j))*
zs) - pivar(j) + sigmavar(j)) + b22(j)*exp(1i*omega(j)*
*sqrt(q22(j))*(z - zs))*(rho var(j)*exp(2i*omega(j)*
sqrt(q22(j))*zs) - rho var(j) + thetavar(j)));
132
133 sigma(j) = 0.5*(pivar(j)*y11(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(q12
(j))*(z - zs)) + rho var(j)*y12(j)*exp(-1i*omega(j)*
sqrt(q22(j))*(z - zs)) - y11(j)*(exp(1i*omega(j)*sqrt(
q12(j))*(z - zs)))*(pivar(j)*exp(2i*omega(j)*sqrt(q12(
j))*zs) - pivar(j) + sigmavar(j)) - y12(j)*exp(1i*
omega(j)*sqrt(q22(j))*(z - zs))*(rho var(j)*exp(2i*
omega(j)*sqrt(q22(j))*zs) - rho var(j) + thetavar(j)));
134
135 pf(j) = 0.5*(pivar(j)*y21(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(q12(j)
)*(z - zs)) + rho var(j)*y22(j)*exp(-1i*omega(j)*sqrt(

```

```

    q22(j))*(z - zs)) - y21(j)*(exp(1i*omega(j)*sqrt(q12(j)
    ))*(z - zs)))*(pivar(j)*exp(2i*omega(j)*sqrt(q12(j))*
    zs) - pivar(j) + sigmavar(j)) - y22(j)*exp(1i*omega(j)
    *sqrt(q22(j))*(z - zs))*(rho var(j)*exp(2i*omega(j)*
    sqrt(q22(j))*zs) - rho var(j) + thetavar(j)));
136
137 end
138
139 %Contornando NaN - v
140 v(200000/df) = 0.5*(v(200000/df - 1) + v(200000/df + 1));
141 v(400000/df) = 0.5*(v(400000/df - 1) + v(400000/df + 1));
142 v(800000/df) = 0.5*(v(800000/df - 1) + v(800000/df + 1));
143 v(1600000/df) = 0.5*(v(1600000/df - 1) + v(1600000/df + 1));
144
145 %Contornando NaN - q
146 q(200000/df) = 0.5*(q(200000/df - 1) + q(200000/df + 1));
147 q(400000/df) = 0.5*(q(400000/df - 1) + q(400000/df + 1));
148 q(800000/df) = 0.5*(q(800000/df - 1) + q(800000/df + 1));
149 q(1600000/df) = 0.5*(q(1600000/df - 1) + q(1600000/df + 1));
150
151 %Contornando NaN - sigma
152 sigma(200000/df) = 0.5*(sigma(200000/df - 1) + sigma(200000/
    df + 1));
153 sigma(400000/df) = 0.5*(sigma(400000/df - 1) + sigma(400000/
    df + 1));
154 sigma(800000/df) = 0.5*(sigma(800000/df - 1) + sigma(800000/
    df + 1));
155 sigma(1600000/df) = 0.5*(sigma(1600000/df - 1) + sigma
    (1600000/df + 1));
156
157 %Contornando NaN - pf
158 pf(200000/df) = 0.5*(pf(200000/df - 1) + pf(200000/df + 1));
159 pf(400000/df) = 0.5*(pf(400000/df - 1) + pf(400000/df + 1));
160 pf(800000/df) = 0.5*(pf(800000/df - 1) + pf(800000/df + 1));
161 pf(1600000/df) = 0.5*(pf(1600000/df - 1) + pf(1600000/df + 1)
    );

```

```

162
163 %*****%
164 %           SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO           %
165 %*****%
166
167 %Passo de tempo
168 dt = 1/fMax;
169 %Tempo em milisegundos
170 t = 1000*[0:num-1]*dt;
171
172 %Transformada inversa de Fourier da solução
173 vinv = ifft(v);
174 qinv = ifft(q);
175 sigmainv = ifft(sigma);
176 pfinv = ifft(pf);
177
178 %Condição inicial
179 vinv(1) = 0;
180 qinv(1) = 0;
181 sigmainv(1) = 0;
182 pfinv(1) = 0;
183
184 figure(1)
185 %Gráfico da velocidade de deslocamento absoluto da matriz (
      fase sólida)
186 subplot(2,1,1), plot(t, vinv);
187 title('Velocidade de deslocamento absoluto da matriz (fase
      sólida)');
188 xlabel('Tempo(ms)');
189 ylabel('Amplitude (m/s)');
190 set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Arial')
191 set(0, 'DefaultAxesFontSize', 14)
192 legend('fd = 200 kHz');
193
194 %Gráfico da velocidade de filtração de Darcy
195 subplot(2,1,2), plot(t, qinv);

```

```
196 title('Velocidade de filtração de Darcy');
197 xlabel('Tempo(ms)');
198 ylabel('Amplitude (m/s)');
199 set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Arial')
200 set(0, 'DefaultAxesFontSize', 14)
201 legend('fd = 200 kHz');
202
203 figure(2)
204 %Gráfico da tensão
205 subplot(2,1,1), plot(t, sigmainv);
206 title('Tensão');
207 xlabel('Tempo(ms)');
208 ylabel('Amplitude (Pa)');
209 set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Arial')
210 set(0, 'DefaultAxesFontSize', 14)
211 legend('fd = 200 kHz');
212
213 %Gráfico da pressão no fluido
214 subplot(2,1,2), plot(t, pfinv);
215 title('Pressão no fluido');
216 xlabel('Tempo(ms)');
217 ylabel('Amplitude (Pa)');
218 set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Arial')
219 set(0, 'DefaultAxesFontSize', 14)
220 legend('fd = 200 kHz');
```



## ***APÊNDICE D – Código Computacional: Fonte Harmônica***

Apresenta-se neste apêndice o código computacional desenvolvido para plotar os gráficos da função da fonte no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Listing D.1: Fonte Harmônica.

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4 format long
5
6 %*****%
7 %                DOMÍNIO DO TEMPO                %
8 %*****%
9
10 %Frequência central ou dominante da fonte [Hz]
11 fd = 2.e5;
12 %Frequência central ou dominante da fonte [rad/s]
13 omegad = 2*pi*fd;
14
15 %Intervalo de tempo [s]
16 dt = 1.e-7;
17 %Número de elementos de tempo considerados
18 N = 50;
19 %Período amostral
20 T = N*dt;
21 %Tempo amostral
22 t = [0:N]*dt;

```

```

23
24 for j = 1:length(t)
25
26     g(j) = sin(omegad*t(j)) - (21/32)*sin(2*omegad*t(j)) +
           (63/768)*sin(4*omegad*t(j)) - (1/512)*sin(8*omegad*t(j)
           ));
27
28 end
29
30 %Gráfico da função da fonte no domínio do tempo
31 figure(1)
32 plot(t,g);
33 title('Fonte Harmônica');
34 xlabel('Tempo(s)');
35 ylabel('g(t)');
36 set(0, 'DefaultAxesFontName', 'Arial')
37 set(0, 'DefaultAxesFontSize', 14)
38 legend('Frequência dominante: 200 kHz');
39
40 %*****%
41 %                DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA                %
42 %*****%
43
44 %Intervalo de frequência temporal
45 df = 10;
46 %Frequência máxima amostral
47 fMax = 1.e7;
48 %Número de elementos e frequência considerados
49 num = fMax/df;
50
51 %Frequência amostral (Hz)
52 f = [0:num]*df;
53
54 %Frequência amostral (rad/s)
55 omega = 2*pi*f;
56

```

```

57 for j = 1:num+1
58
59     GG(j) = omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/omegad)-1)/(omega(j)
        ^2 - omegad^2)) - (21/16)*omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)
        /omegad)-1)/(omega(j)^2 - 4*omegad^2)) + (21/64)*
        omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/omegad)-1)/(omega(j)^2 -
        16*omegad^2)) - (1/64)*omegad*((exp(-2i*pi*omega(j)/
        omegad)-1)/(omega(j)^2 - 64*omegad^2));
60
61 end
62
63 %Gráfico da função da fonte no domínio da frequência
64 figure(2)
65 semilogx(f,abs(GG));
66 title('Fonte Harmônica');
67 xlabel('Frequência(Hz)');
68 ylabel('|G(w)|');
69 set(0,'DefaultAxesFontName','Arial')
70 set(0,'DefaultAxesFontSize',14) %Seta tamanho da fonte
71 legend('Frequência dominante: 200 kHz');

```

# Índice Remissivo

- Área, Sub-área e Disciplinas Relacionadas, 11
- Abstract, xix
- Acrônimos, xvi
- Agradecimentos, v
- Alfabeto Grego, xv
- Alfabeto Latino, xiii
- Algoritmo: Solução Analítica do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte, 63
- Autovalores e Autovetores para o Sistema de Biot-JKD, 20
- Biografia, ii
- Código Computacional: Fonte Harmônica, 74
- Código Computacional: Solução do Sistema de Biot-JKD para um Meio Homogêneo Com a Presença de Fonte, 65
- Classificação da Pesquisa, 11
- Conclusões, 54
- Condição de Salto na Interface entre as Camadas, 22
- Condições de Fronteira, 15
- Dados da Simulação Numérica, 46
- Dados Iniciais, 16
- Dedicatória, iv
- Desenvolvimento, 14
- Diagonalização de Ursin, 18
- Epígrafe, vii
- Equipamento, 13
- Escopo do Problema, 1
- Fonte do Tipo Dinamite, 60
- Fonte Pontual Vertical, 62
- Formato Ursin: Sistema de Biot-JKD como um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, 17
- Hipóteses de Trabalho, 13
- Interface entre Dois Meios Porosos, 15
- Introdução, 1
- Limitações do Trabalho, 12
- Meio Estratificado: Matriz de Reflexão e Matriz de Transmissão, 25
- Meio Homogêneo: Ondas Ascendentes e Ondas Descendentes, 21
- Metodologia, 10
- Motivação para o Tema, 10
- Nomenclatura, xiii
- Objetivo, 4
- Organização do Documento, 4
- Pressupostos, 12
- Resposta Poroelástica, 7
- Resultados e Análises, 49
- Resultados para o Caso 1, 50
- Resultados para o Caso 2, 51
- Resultados para o Caso 3, 52
- Resumo, xvii
- Revisão Bibliográfica, 6
- Símbolos, xvi
- Simulação Computacional, 13
- Simulação da Propagação de Ondas Elásticas em Meio Homogêneo, 46
- Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio da Frequência, 16
- Sistema das Equações de Biot-JKD no Domínio do Tempo, 14
- Software, 13

Solução Com a Presença de Fonte, 33  
Solução Com a Presença de Fonte:  
    Meio Homogêneo, 42  
Solução no Espaço Original, 45  
Solução Sem a Presença de Fonte, 21  
Sub-índices, xv

Sugestões para Trabalhos Futuros, 56  
Super-índices, xvi  
Teoria da Poroelasticidade, 6  
Tipo de Análise, 12  
Tipo de Modelagem, 12  
Tipos de Fonte, 60