

Fluxo de Fluidos Compressíveis em Meios Porosos

HADASSA CABRAL RIBEIRO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ
ABRIL - 2012

Fluxo de Fluidos Compressíveis em Meios Porosos

HADASSA CABRAL RIBEIRO

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Orientador: Prof. Adolfo Puime Pires, D.Sc.

MACAÉ - RJ
ABRIL - 2012

Fluxo de Fluidos Compressíveis em Meios Porosos

HADASSA CABRAL RIBEIRO

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Aprovada em 10 de Abril de 2012.

Comissão Examinadora:

Viatcheslav Ivanovich Priimenko (Ph.D., Física-Matemática - LENEP/CCT/UENF)

Carlos Enrique Pico Ortiz (D.Sc, Engenharia de Reservatório - LENEP/CCT/UENF)

Adolfo Puime Pires (D.Sc, Engenharia de Reservatório - LENEP/CCT/UENF)
(Orientador)

*A Deus, meu melhor amigo, razão do meu viver, aquele que me amou desde o ventre
e sempre esteve comigo.*

Agradecimentos

A Deus por sua presença constante em minha vida, por me orientar e capacitar no caminho que Ele mesmo escolheu para mim.

Aos meus queridos pais Luzimar e Eleuzine, que sempre acreditaram que eu poderia chegar onde quisesse e me deram todo apoio espiritual e emocional de que precisei. Meus maiores exemplos de vida, que me ensinaram da simplicidade à audácia, obrigada por terem me feito todos os dias filha de vocês.

Aos meus irmãos Thiago e Matheus, por sua amizade eterna, companheirismo e paciência. Sou grata a Deus por tê-los em laço inquebrável.

A Chafic pelo estímulo e prontidão em me auxiliar nas mais diversas situações, contribuindo grandemente para a conclusão desse trabalho.

A Stella por seus conselhos e bom humor, a Izabela e Estela pela amizade eterna que tanto me ensinou e me fortaleceu, a Deisy e Henrique, esse casal que me adotou, a Bismarck por seu entusiasmo e a todos os amigos que tornaram minha vida mais divertida e suave, e me fizeram entender pelo que devia lutar. Alguns mesmo longe, só pela palavra amiga, renovaram diversas vezes minhas forças para prosseguir, sem esses não teria sido tão compensador chegar até aqui.

Ao meu orientador Adolfo pela amizade, bom humor e paciência, qualidades que foram essenciais à boa conclusão desse trabalho e pelos desafios propostos que me fizeram crescer emocional e profissionalmente.

Aos professores e funcionários do LENEP/CCT/UENF pela disposição em ajudar em todos os impasses.

Ao CNPQ pela bolsa de estudos.

"Os Teus olhos viram o meu corpo ainda informe, e no Teu livro todas estas cousas foram escritas; as quais iam sendo dia a dia formadas, quando nem ainda uma delas havia." (Salmos 139:16)

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 2.1.3.2.1 | Reservatório com Alimentação Externa em Tem- pos Longos de Produção | 34 |
| 2.1.3.3 | Reservatório Selado | 35 |
| 2.1.3.3.1 | Reservatório Selado em Tempos Longos de Produção | 36 |
| 3 | Resultados e Análises | 41 |
| 3.1 | Fluxo Linear | 43 |
| 3.1.1 | Reservatório com Alimentação Externa | 43 |
| 3.1.2 | Reservatório Selado | 45 |
| 3.2 | Fluxo Radial | 47 |
| 3.2.1 | Reservatório com Alimentação Externa | 47 |
| 3.2.2 | Reservatório Selado | 49 |
| 4 | Considerações Finais | 51 |
| | Referências Bibliográficas | 52 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Modelo de Reservatório Linear | 7 |
| 2 | Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Transiente | 7 |
| 3 | Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Permanente | 11 |
| 4 | Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Pseudopermanente | 18 |
| 5 | Modelo de Reservatório Radial | 30 |
| 6 | Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Transiente | 32 |
| 7 | Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Permanente | 33 |
| 8 | Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Pseudopermanente | 35 |
| 9 | Fluxograma representando os processos e componentes implementados | 42 |
| 10 | Solução Reservatório com Alimentação Externa Linear - Tempos Curtos | 44 |
| 11 | Solução Reservatório com Alimentação Externa Linear - Tempos Longos | 45 |
| 12 | Solução Reservatório Selado Linear - Tempos Curtos | 46 |
| 13 | Solução Reservatório Selado Linear - Tempos Longos | 46 |
| 14 | Solução Reservatório com Alimentação Externa Radial - Tempos Curtos | 48 |
| 15 | Solução Reservatório com Alimentação Externa Radial - Tempos Longos | 48 |
| 16 | Solução Reservatório Selado Radial - Tempos Curtos | 49 |
| 17 | Solução Reservatório Selado Radial - Tempos Longos | 50 |

Lista de Tabelas

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Parâmetros do Reservatório para Fluxo Linear | 43 |
| 2 | Parâmetros do Reservatório para Fluxo Radial | 47 |

Nomenclatura

Símbolos

- ∇ Gradiente
 ∇^2 Operador Laplaciano

Alfabeto Latino

| | | |
|-----------|--|-------------------------|
| A | Área | $[m^2]$ |
| B_l | Fator-volume-formação | $[m^3/m_{STD}^3]$ |
| c_l | Compressibilidade da fase | $[Pa^{-1}]$ |
| c_f | Compressibilidade da formação | $[Pa^{-1}]$ |
| k | Permeabilidade do meio poroso | $[m^2]$ |
| L | Comprimento do reservatório | $[m]$ |
| M | Massa molecular do gás | $[kg/mol]$ |
| m | Massa | $[kg]$ |
| $m(p)$ | Pseudopressão | $[Pa/s]$ |
| p | Pressão | $[Pa]$ |
| p_{in} | Pressão inicial do reservatório | $[Pa]$ |
| p_{STD} | Pressão em condição padrão | $[Pa]$ |
| q | Vazão de escoamento | $[m^3/s]$ |
| q_{STD} | Vazão de escoamento em condição padrão | $[m^3/s]$ |
| R | Constante universal dos gases | $[kg\ m^2/s^2\ mol\ K]$ |
| r_w | Raio do poço | $[m]$ |
| r | Raio | $[m]$ |
| T | Temperatura | $[K]$ |
| t | Tempo | $[s]$ |
| T_{STD} | Temperatura em condição padrão | $[K]$ |
| x | Posição | $[m]$ |
| Z | Fator de compressibilidade | Adimensional |

Alfabeto Grego

| | | |
|------------|-----------------------------------|--------------|
| γ_l | Peso específico do fluido | $[kg/m^2s]$ |
| μ_l | Viscosidade do fluido considerado | $[Pa s]$ |
| ρ_l | Massa específica do fluido | $[kg/m^3]$ |
| ϕ | Porosidade do meio poroso | Adimensional |

Sub-índices

| | |
|-------|--|
| c | Crítico |
| D | Adimensional |
| g | Gás |
| in | Inicial |
| t | Total |
| l | Referente a fase, o para óleo e g para gás |
| o | Óleo |
| pr | Pseudo-reduzido |
| r | Reduzido |
| STD | Condições padrão de temperatura e pressão |
| w | Poço |

Super-índices

* Valor não-corrigido

Abreviaturas

| | |
|-------|------------------------------------|
| HDE | Hydraulic Diffusivity Equation |
| EDH | Equação da Difusividade Hidráulica |

Resumo

O fluxo de fluidos em meios porosos é governado pela equação da difusividade hidráulica, uma equação diferencial parcial deduzida a partir de três equações principais: a *equação da continuidade*, a *Lei de Darcy* e uma equação de estado. A partir da EDH podem ser encontradas soluções de problema de valor inicial e de contorno para diferentes modelos de fluxo em reservatórios. O escoamento de fluidos de compressibilidade pequena e constante em reservatórios é modelado por uma equação diferencial parcial parabólica. Este modelo não pode ser aplicado para o gás natural, porque neste caso a EDH se torna não-linear. Várias tentativas têm sido feitas para linearizar esta equação, a técnica mais comum e aceita é o uso da pseudopressão com variável dependente. Neste trabalho foi resolvida a EDH em função da pseudopressão, para fluxo radial e linear, em três diferentes condições de contorno externas (reservatório infinito, selado e realimentado). Em todos os casos, utilizou-se vazão constante em condições padrão como condição de contorno interna. Também foram desenvolvidas soluções aproximadas, válidas apenas para tempos iniciais ou para longos períodos de tempo. Em paralelo ao desenvolvimento das soluções da EDH para gases, foi construído um algoritmo que tem como resultado os perfis de pseudopressão no reservatório ao longo do tempo.

Palavras chave: [Fluxo de fluidos em meios porosos. Engenharia de reservatório. Pseudopressão. Reservatórios de gás].

1 Introdução

Muitos fenômenos físicos podem ser modelados com equações diferenciais. Estas equações podem gerar dois tipos de problemas: um conhecido como problema de valor inicial ou problema de Cauchy e outro conhecido como problema de valor de contorno. Nos problemas de valor inicial, a variável independente é geralmente o tempo. Nos problemas de valor de contorno, a variável independente é uma distância espacial e a função desconhecida é especificada em dois pontos do domínio.

O fluxo de fluidos em meios porosos tem como ponto focal a equação da difusividade hidráulica, uma equação diferencial parcial a partir da qual podem ser encontradas soluções de problema de valor inicial e de contorno para diferentes condições de reservatório. A EDH é deduzida a partir da associação de três equações básicas, a *equação da continuidade*:

$$\nabla(\rho v) = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.1)$$

ou conservação de massa, da *Lei de Darcy*:

$$v = -\frac{k(p)}{\mu(p)} \nabla p \quad (1.2)$$

uma equação de transporte que relaciona a velocidade ao gradiente de pressão, e uma equação de estado que tanto pode ser a *lei dos gases*:

$$\rho = \frac{M}{RT} \left(\frac{p}{Z(p)} \right) \quad (1.3)$$

como a compressibilidade para líquidos:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (1.4)$$

que relacionam a massa específica do fluido com o gradiente de pressão.

O escoamento de um fluido incompressível em meios porosos, caso de líquidos

e gases submetidos a pequenos gradientes de pressão, é modelado por uma equação diferencial parcial parabólica. Para fluidos compressíveis a EDH que modela seu escoamento (Equação 1.5) é não-linear, devido à presença de coeficientes função da pressão:

$$\nabla \left(\frac{p}{Z(p) \mu(p)} \nabla p \right) = \frac{\phi}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Z(p)} \right) \quad (1.5)$$

Diversas técnicas foram propostas na tentativa de linearizar esse problema, sendo a mais comum e aceita a pseudopressão (AL-HUSSAINY et al., 1966). Porém, a presença da viscosidade e a compressibilidade do gás real, funções da pressão, no coeficiente da derivada temporal, mantêm a não-linearidade da equação da difusividade (Equação 1.6):

$$\nabla^2 m(p) = \frac{\phi}{k} c_g(p) \mu(p) \frac{\partial m(p)}{\partial t} \quad (1.6)$$

Uma aproximação para contornar a não-linearidade da EDH para gases reais tem sido usar μc_g avaliado à pressão inicial do sistema. Vale lembrar que, mesmo com a aplicação da pseudopressão e o uso do produto viscosidade *versus* compressibilidade do gás constante, a não-linearidade da EDH para fluidos compressíveis permanece (ROSA et al., 2006).

O principal objetivo desse trabalho é desenvolver as soluções da EDH que modelam o comportamento da pressão desde os instantes iniciais de produção até o regime dominado pelas fronteiras, para fluxo linear e radial, em reservatórios selados e em reservatórios com alimentação externa. Como resultado principal obtemos o campo de pressões no reservatório em qualquer instante de tempo.

2 *Modelagem Física-Matemática*

No estudo de equações diferenciais, um problema de valor de contorno ou de fronteira constitui-se de uma equação diferencial provida de um conjunto de restrições, as chamadas condições de contorno. A solução para um problema de valor de contorno é uma aquela que satisfaça as condições de contorno. Problemas de valor de contorno surgem em diversos ramos da ciência. O escoamento de água através de um aquífero, o fluxo de óleo em um reservatório e o escoamento de gases através de um meio poroso são problemas de valor de contorno importantes na engenharia de reservatórios. Alguns autores vem estudando esses casos, como Everdingen e Hurst (1949), que apresentaram modelos de influxo para dois tipos de aquífero: radial e linear. Através do uso das transformadas de Laplace, resolveram a EDH do sistema reservatório-aquífero, com pressão constante no contato. E, aplicando a superposição de efeitos, obtiveram a solução com a pressão variando no contato em função do tempo.

Aproximadamente 10 anos depois, Carter e Tracy (1960) propuseram um modelo aplicável a qualquer geometria de fluxo, sendo necessário porém, o conhecimento prévio da solução para a pressão adimensional em função do tempo para a geometria de aquífero considerada. Os modelos desenvolvidos por Fetkovich (1971) e os modelos aproximados introduzidos por Leung (1986), *modelo pseudopermanente* (“PSS model”) e *modelo pseudopermanente modificado* (“MPSS model”) são aplicáveis a aquíferos finitos e consideram que o fluxo do aquífero para o reservatório se dá sob o regime pseudopermanente.

A equação diferencial parcial que modela o fluxo de calor através de sólidos foi resolvida por Carslaw e Jaeger (1959), utilizando transformadas de Laplace e transformadas de Fourier. A importância desse estudo para a engenharia de reservatórios está na semelhança das soluções desenvolvidas por Carslaw e Jaeger (1959) com as soluções para o fluxo de fluidos pouco compressíveis através de meios porosos.

Neste trabalho foi modelado o escoamento de fluidos compressíveis através de

meios porosos. Porém, de modo diferente ao fluxo de fluidos pouco compressíveis, a equação diferencial que ajusta esse problema é não linear. Jones (1961), Carter e Riley (1963), Rowan e Clegg (1964) e Dranchuk e Flock (1966) formularam a EDH para gases em função da pressão ou do quadrado da pressão. Porém, quando os reservatórios apresentam altos gradientes de pressão durante o período de produção, esses modelos não tratam adequadamente as variações das propriedades dos fluidos, uma vez que o produto viscosidade-compressibilidade depende da pressão.

Na tentativa de linearizar a equação da difusividade hidráulica, Al-Hussainy et al. (1966) propõem a pseudopressão em substituição à pressão como variável dependente. Com essa função, a equação da difusividade para o gás se torna semelhante à equação para fluidos pouco compressíveis e os termos quadráticos dos gradientes de pressão, que normalmente são desprezados nas soluções para fluidos pouco compressíveis, são devidamente tratados. No entanto, o uso da pseudopressão não lineariza completamente a equação, já que persiste a não-linearidade no termo relativo à difusividade hidráulica.

A solução analítica do escoamento de gás em um meio poroso radial infinito foi obtida por meio da transformada de Boltzmann (PERES et al., 1990). Contudo, ela só pode ser aplicada a problemas auto-similares. Mireles e Blasingame (2003) propuseram uma metodologia de solução da equação diferencial não-linear do gás por transformada de Laplace. Onde a difusividade adimensional é considerada função unicamente do tempo. Embora sujeita a críticas, essa solução funciona bem para o caso de um poço vertical em um reservatório cilíndrico selado.

No ano passado Barreto Jr. (2011) apresentou a solução da EDH para fluidos compressíveis através das funções de Green, levando em conta todas as não-linearidades dessa equação no desenvolvimento das soluções analíticas para diferentes geometrias de fluxo.

2.1 Equação da Difusividade Hidráulica para Gases

Na a modelagem físico-matemática foram adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras (ROSA et al., 2006):

1. meio poroso homogêneo e isotrópico.
2. fluxo horizontal e isotérmico.

3. poço vertical penetrando totalmente a formação.
4. pequenos gradientes de pressão.
5. rocha com compressibilidade pequena e constante.
6. forças gravitacionais desprezíveis.
7. fluidos e rochas não reagentes em si.
8. espessura do meio poroso constante.
9. fluxo monofásico.

A partir da equação da continuidade para fluxo isotérmico, dada por:

$$\nabla(\rho v) = -\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.1)$$

da Lei de Darcy para fluxo horizontal:

$$v = -\frac{k(p)}{\mu(p)} \nabla p \quad (2.2)$$

e de uma equação de estado, no caso de um gás real expressa através de:

$$\rho = \frac{M}{RT} \left(\frac{p}{Z(p)} \right) \quad (2.3)$$

é possível obter a equação da difusividade hidráulica para gás:

$$\nabla \left(\frac{p}{Z(p) \mu(p)} \nabla p \right) = \frac{\phi}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Z(p)} \right) \quad (2.4)$$

2.1.1 Pseudopressão

A pseudopressão, proposta por Al-Hussainy et al. (1966), também chamada de “potencial do gás real”, é definida como:

$$m(p) = 2 \int_{p_b}^p \frac{p}{\mu(p) Z(p)} \partial p \quad (2.5)$$

onde p_b é uma pressão de referência arbitrária e a pseudopressão tem a unidade de $\frac{p^2}{\mu}$.

Para o cálculo da pseudopressão, μ e Z precisam ser conhecidos como função da pressão. Quando os resultados da análise PVT não são conhecidos, correlações de propriedades do gás são usadas.

Cabe ressaltar que apesar do uso da pseudopressão a equação da difusividade não é linearizada completamente, uma vez que a viscosidade e a compressibilidade do gás dependem da pressão. Alguns autores propuseram o uso do produto μc_g avaliado à pressão inicial do sistema (p_i), ou seja $(\mu c_g)_i$, (ROSA et al., 2006). a fim de contornar o problema da não linearidade da EDH.

Aplicando a pseudopressão à equação da difusividade hidráulica para gases reais, obtemos a seguinte expressão:

$$\nabla^2 m(p) = \frac{\phi}{k} c_g(p) \mu(p) \frac{\partial m(p)}{\partial t} \quad (2.6)$$

2.1.2 Fluxo Linear

A equação diferencial que modela o escoamento para fluxo linear (Figura 1) escrita em função da pseudopressão, em variáveis adimensionais, é dada por:

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} \quad (2.7)$$

onde:

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t L^2} \quad (2.8)$$

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (2.9)$$

$$m_D(x_D, t_D) = \frac{kAT_{STD}}{2p_{STD}q_{STD}TL} [m(p_{in}) - m(p)] \quad (2.10)$$



Figura 1: Modelo de Reservatório Linear

A condição inicial representa o instante $t_D = 0$, quando o reservatório se encontra em repouso e a pressão é a mesma em qualquer ponto do meio poroso, assim:

CI:

$$m_D(x_D, t_D = 0) = 0, x_D > 0 \quad (2.11)$$

Admitindo a vazão de produção constante em $x_D = 0$, a condição de contorno interna pode ser expressa por:

CCI:

$$\left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=0} = -1, t_D > 0 \quad (2.12)$$

2.1.2.1 Regime Transiente

No início da produção dos fluidos de um reservatório, ocorre o caso particular do regime transiente, quando o reservatório se comporta como infinito (Figura 2).



Figura 2: Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Transiente

Logo, a condição de contorno externa representa um reservatório tão extenso que

a produção do poço é insuficiente para alterar as condições de repouso no limite externo:

CCE:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} m_D(x_D, t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.13)$$

A solução da EDH em função da pseudopressão para o regime transiente é do tipo $m_D(x_D, t_D)$, para a qual define-se uma função $f(\xi)$, de tal modo que:

$$m_D(x_D, t_D) = x_D f(\xi) \quad (2.14)$$

onde ξ é dada por:

$$\xi(x_D, t_D) = \frac{x_D}{\sqrt{4t_D}} \quad (2.15)$$

Derivando m_D em relação a x_D e a t_D obtém-se:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} = f + \xi \frac{df}{d\xi} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x_D} \left(2 \frac{df}{d\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) \quad (2.17)$$

e

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = x_D \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t_D} \quad (2.18)$$

Os termos $\frac{\partial \xi}{\partial x_D}$ e $\frac{\partial \xi}{\partial t_D}$ são encontrados a partir da Equação (2.15):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_D} = \frac{\xi}{x_D} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t_D} = -\frac{\xi}{2t_D} \quad (2.20)$$

Então,

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} = f + \xi \frac{df}{d\xi} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial x_D^2} = \frac{\xi}{x_D} \left(2 \frac{df}{d\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) \quad (2.22)$$

e

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = - \frac{x_D \xi}{2t_D} \frac{df}{d\xi} \quad (2.23)$$

Substituindo as Equações (2.22) e (2.23) na equação da difusividade resulta em:

$$\frac{\xi}{x_D} \left(2 \frac{df}{d\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) = - \frac{x_D \xi}{2t_D} \frac{df}{d\xi} \quad (2.24)$$

ou, após simplificação:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} + 2\xi \right) \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (2.25)$$

Definindo $\frac{df}{d\xi}$ como f' , separando as variáveis e integrando a expressão, obtém-se:

$$\int \frac{df'}{f'} = - \int \left(\frac{2}{\xi} + 2\xi \right) d\xi \quad (2.26)$$

cujo resultado é:

$$\ln f' = -2 \ln \xi - \xi^2 + C_1 \quad (2.27)$$

ou ainda:

$$f' = C_2 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} \quad (2.28)$$

onde $C_2 = e^{C_1}$

Para definir os intervalos de integração na Equação (2.28) deve-se analisar as condições inicial e de contorno. Tanto a condição de inicial como a de contorno externa são satisfeitas quando $f(\xi) = 0$. Pode-se observar na Equação (2.15) que tanto no caso de $t_D = 0$, condição inicial, quanto em $x_D \rightarrow \infty$, condição de contorno externa, $\xi \rightarrow \infty$. Assim, as duas condições se reduzem a uma: $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0$.

Substituindo a Equação (2.16) na condição de contorno interna e sabendo que quando $x_D = 0$, $\xi = 0$, obtém-se:

$$\left[f(\xi) + \xi f'(\xi) \right]_{\xi=0} = -1 \quad (2.29)$$

A integração da Equação (2.28) resulta na seguinte expressão:

$$f(\xi) = C_2 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz \quad (2.30)$$

O limite inferior é escolhido de modo que $f(\xi)$ seja igual a zero. A integração por partes da Equação (2.30) leva a:

$$f(\xi) = C_2 \left(-\frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} - 2 \int_{\infty}^{\xi} e^{-z^2} dz \right) \quad (2.31)$$

A constante C_2 pode ser obtida através da Equação (2.29):

$$\left[\underbrace{C_2 \left(-\frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} - 2 \int_{\infty}^{\xi} e^{-z^2} dz \right)}_{f(\xi)} + \underbrace{\frac{\xi C_2 e^{-\xi^2}}{\xi^2}}_{\xi f'(\xi)} \right]_{\xi=0} = -1 \quad (2.32)$$

de onde se obtém:

$$-2 \int_{\infty}^0 e^{-z^2} dz = -1 \quad (2.33)$$

Porém,

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.34)$$

então:

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (2.35)$$

Logo:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (2.36)$$

A função erro complementar, $erfc(\xi)$, é definida como:

$$erfc(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (2.37)$$

Portanto, a função $f(\xi)$ é dada pela expressão:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} - erfc(\xi) \quad (2.38)$$

Desse modo, a solução da equação da difusividade hidráulica para fluxo linear e regime transiente, em variáveis adimensionais, é dada por:

$$m_D(x_D, t_D) = x_D \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} - erfc(\xi) \right] \quad (2.39)$$

Substituindo a expressão de ξ na Equação (2.39), temos:

$$m_D(x_D, t_D) = \left[\sqrt{\frac{4t_D}{\pi}} e^{-\frac{x_D^2}{4t_D}} - x_D erfc\left(\frac{x_D}{\sqrt{4t_D}}\right) \right] \quad (2.40)$$

2.1.2.2 Reservatório com Alimentação Externa

A solução da equação da difusividade nos permite observar como a pressão se comporta no reservatório ao longo do tempo. Nessa seção são desenvolvidas as soluções válidas em qualquer tempo e as soluções aproximadas, suficientes em tempos curtos ou tempos longos, para reservatórios com alimentação externa

No regime permanente, admite-se que a pressão no limite externo do reservatório seja mantida constante (Figura 3), este regime de fluxo pode representar o problema físico de um reservatório sob a influência de um aquífero.

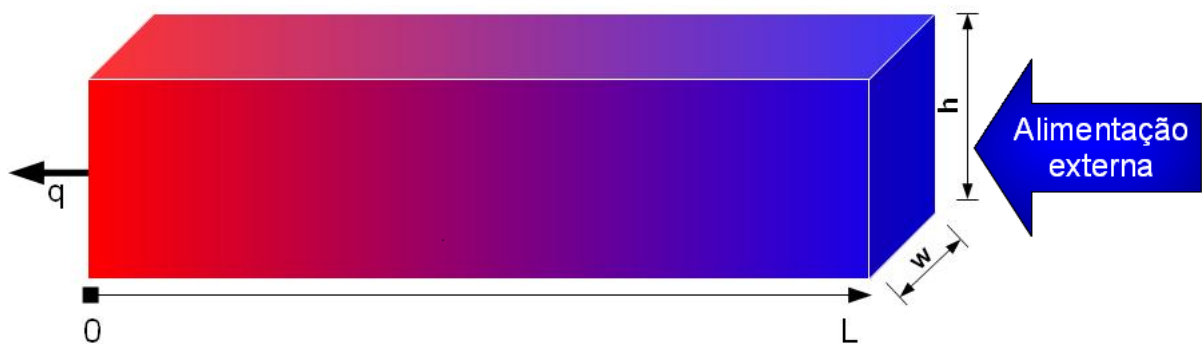


Figura 3: Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Permanente

A manutenção de pressão no limite externo do reservatório gera a seguinte condição de contorno externa:

CCE:

$$m_D(x_D = 1, t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.41)$$

Para desenvolver a solução divide-se $m_D(x_D, t_D)$ em duas partes:

$$m_D(x_D, t_D) = \psi(x_D, t_D) + \theta(x_D) \quad (2.42)$$

uma parte correspondente ao regime transiente, dependente do tempo e do espaço, e uma correspondente ao regime permanente, independente do tempo.

Assim a equação da difusividade, Equação (2.7), em função de $\psi(x_D, t_D)$ e $\theta(x_D)$, é reescrita como:

$$\frac{\partial^2 \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{d^2 \theta(x_D)}{dx_D^2} = \frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial t_D}, \quad (2.43)$$

Considerando:

$$\frac{d^2 \theta(x_D)}{dx_D^2} = 0 \quad (2.44)$$

chegamos a:

$$\frac{\partial^2 \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2.45)$$

As condições inicial e de contorno para esse problema são:

CI:

$$m_D(x_D, t_D) = \psi(x_D, t_D) + \theta(x_D) = 0 \quad (2.46)$$

Assim:

$$\psi(x_D, t_D) = -\theta(x_D) \quad (2.47)$$

CCI:

$$\left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} = \left(\frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} + \left(\frac{d\theta(x_D)}{dx_D}\right)_{x_D=0} = -1 \quad (2.48)$$

Admitindo:

$$\left(\frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D}\right)_{x_D=0} = 0 \implies \left(\frac{d\theta(x_D)}{dx_D}\right)_{x_D=0} = -1 \quad (2.49)$$

CCE:

$$m_D(1, t_D) = \psi(1, t_D) + \theta(1) = 0 \quad (2.50)$$

Como no regime permanente as fronteiras ainda não sofreram queda de pressão:

$$\psi(1, t_D) = 0 \quad (2.51)$$

Logo, chegamos a:

$$\theta(1) = 0 \quad (2.52)$$

2.1.2.2.1 Parte Permanente Integrando a Equação (2.44), obtém-se:

$$\theta(x_D) = C_1 x_D + C_2 \quad (2.53)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$x_D = 0 \implies \left(\frac{d\theta(x_D)}{dx_D}\right)_{x_D=0} = -1 \therefore C_1 = -1$$

$$x_D = 1 \implies \theta(1) = 0 \therefore -1 \times 1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 1$$

Portanto:

$$\theta(x_D) = 1 - x_D \quad (2.54)$$

2.1.2.2.2 Parte Transiente Podemos reescrever a parcela correspondente ao regime transiente como:

$$\psi(x_D, t_D) = X(x_D)T(t_D) \quad (2.55)$$

A Equação (2.45) em função de $X(x_D)$ e $T(t_D)$ é dada por:

$$T(t_D)X''(x_D) = X(x_D)T'(t_D) \quad (2.56)$$

resolvendo essa equação por separação de variáveis, temos:

$$\frac{X''_D}{X_D} = -\lambda^2 = \frac{T'_D}{T_D} \quad (2.57)$$

ou seja:

$$X''_D = -\lambda^2 X_D \quad (2.58)$$

e

$$T'_D = -\lambda^2 T_D \quad (2.59)$$

As condições inicial e de contorno desse problema podem ser escritas da seguinte forma:

CI:

$$X(x_D)T(0) = -1 + x_D \quad (2.60)$$

CCI:

$$X'_D(0)T_D(t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.61)$$

Para obter a solução não-trivial:

$$X'_D(0) = 0 \quad (2.62)$$

CCE:

$$X(1)T_D(t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.63)$$

$$X_D(1) = 0 \quad (2.64)$$

As soluções para X_D e T_D são, respectivamente, do tipo:

$$X_D(x_D) = m_1 e^{k_1 x_D} \quad (2.65)$$

$$T_D(t_D) = m_2 e^{k_2 t_D} \quad (2.66)$$

Assim, podemos calcular as constantes k_1 e k_2 , aplicando as Equações (2.58) e (2.59) às Equações (2.65) e (2.66):

$$m_1^2 k_1^2 e^{k_1 x_D} = -m_1^2 \lambda^2 e^{k_1 x_D} \quad (2.67)$$

$$m_2 k_2 e^{k_2 t_D} = -m_2 \lambda^2 e^{k_2 t_D} \quad (2.68)$$

De onde obtemos as seguintes expressões para as constantes:

$$k_1 = \sqrt{-\lambda^2} \quad (2.69)$$

$$k_2 = -\lambda^2 \quad (2.70)$$

Assim, a solução para a parcela correspondente ao tempo, é:

$$T_D(t_D) = m_2 e^{-\lambda^2 t_D} \quad (2.71)$$

Para $X_D(x_D)$, temos a seguinte solução:

$$X_D(x_D) = A \sin(\lambda x_D) + B \cos(\lambda x_D) \quad (2.72)$$

Aplicando as condições de contorno, Equações (2.61) e (2.63), na solução, temos:

$$X_D(x_D) = A [\lambda \cos(\lambda x_D)]_{x_D=0} + B [-\lambda \sin(\lambda x_D)]_{x_D=0} = 0 \quad (2.73)$$

$$X_D(x_D) = A [\lambda \sin(\lambda x_D)]_{x_D=1} + B [\lambda \cos(\lambda x_D)]_{x_D=1} = 0 \quad (2.74)$$

Resolvendo o sistema composto pelas Equações (2.73) e (2.74):

$$A = 0 \quad (2.75)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2}, n = 1, 3, 5 \dots \infty \quad (2.76)$$

Assim T_D e X_D são:

$$T_D(t_D) = m_2 e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t_D}, n \text{ ímpar} \quad (2.77)$$

$$X_D(x_D) = B \cos\left(\frac{n\pi}{2} x_D\right), n \text{ ímpar} \quad (2.78)$$

Dessa forma:

$$\psi(x_D, t_D) = m_2 e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t_D} B \cos\left(\frac{n\pi}{2} x_D\right) = C e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t_D} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x_D\right) \quad (2.79)$$

Aplicando a condição inicial do problema, temos:

$$C \cos\left(\frac{n\pi}{2} x_D\right) = -1 + x_D, t_D = 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \quad (2.80)$$

Utilizando a série de Fourier, encontramos:

$$X_D(x_D) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=\text{ímpar}}^{\infty} A_n C \cos\left(\frac{n\pi}{2} x_D\right) \quad (2.81)$$

onde:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L (-1 + x_D) \cos(n\pi x_D) dx_D \quad (2.82)$$

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (-1 + x_D) dx_D \quad (2.83)$$

$$L = 1 \quad (2.84)$$

Integrando as Equações (2.82) e (2.83), temos que:

$$A_n = -\frac{8}{(n\pi)^2} \quad (2.85)$$

$$A_0 = 0 \quad (2.86)$$

assim:

$$X_D(x_D) = - \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x_D\right) \quad (2.87)$$

E $\psi_D(x_D, t_D)$ é igual a:

$$\psi_D(x_D, t_D) = - \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x_D\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t_D} \quad (2.88)$$

Substituindo na Equação (2.42) as expressões encontradas para $\psi(x_D, t_D)$ e $\theta(x_D)$, chega-se a solução para reservatório linear realimentado, válida em qualquer tempo:

$$m_D(x_D, t_D) = 1 - x_D - \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x_D\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t_D} \quad (2.89)$$

2.1.2.2.3 Reservatório com Alimentação Externa em Tempos Longos de Produção Para tempos longos a (2.91) podemos desenvolver uma solução aproximada para reservatórios alimentados. Sabendo que no regime permanente a pressão não varia com o tempo, temos que:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = 0 \quad (2.90)$$

logo:

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial x_D^2} = 0 \quad (2.91)$$

A Equação (2.91) também pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} \right) = 0 \quad (2.92)$$

cuja solução é:

$$\frac{dm_D(p)}{dx_D} = C_1 \quad (2.93)$$

A integração desta equação resulta em:

$$m_D(p) = C_1 x_D + C_2 \quad (2.94)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Aplicando as condições de contorno, Equações (2.61) e (2.63), temos:

$$x_D = 0 \implies \left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=0} = -1 \therefore C_1 = -1$$

$$x_D = 1 \implies m_D(x_D = 1, t_D) = 0 \therefore C_1 \times 1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 1$$

Portanto, a solução da equação da difusividade para reservatório linear com manutenção de pressão, em tempos longos, é dada por:

$$m_D(p) = 1 - x_D \quad (2.95)$$

2.1.2.3 Reservatório Selado

O regime permanente representa um reservatório selado nas fronteiras (Figura 4), o que implica na ausência de fluxo através do seu limite exterior.

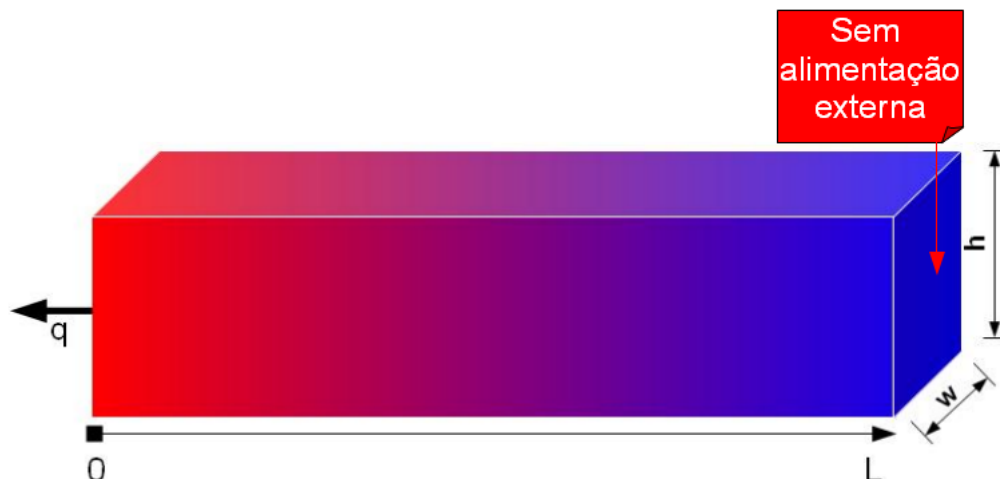


Figura 4: Modelo de Reservatório em Fluxo Linear Pseudopermanente

Logo, a condição de contorno externa, é expressa por:

CCE:

$$\left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0, t_D > 0 \quad (2.96)$$

O desenvolvimento da solução para reservatório selado, como em reservatório alimentado, é realizado através do método de separação de variáveis, assim a solução pode ser dividida em duas partes:

$$m_D(x_D, t_D) = \psi(x_D, t_D) + \theta(x_D, t_D) \quad (2.97)$$

onde $\psi(x_D, t_D)$ corresponde ao regime transiente e $\theta(x_D, t_D)$ ao regime pseudopermanente. Porém, neste caso, as duas parcelas são dependentes de t_D e x_D .

A equação da difusividade, Equação (2.7), em termos de $\psi(x_D, t_D)$ e $\theta(x_D, t_D)$, é dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial t_D} + \frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2.98)$$

As condições inicial e de contorno para o regime permanente, desenvolvido na seção anterior, são válidas no regime pseudopermanente, porém as condições de contorno externa são diferentes. A condição de contorno externa para reservatório selado é dada por :

CCE:

$$\left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = \left(\frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} + \left(\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0 \quad (2.99)$$

como $\left(\frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0$, então:

$$\left(\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0 \quad (2.100)$$

2.1.2.3.1 Parte Pseudopermanente A solução da EDH para esse tipo de problema é encontrada utilizando, alguns conceitos, como a compressibilidade:

$$c_t = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (2.101)$$

onde o volume poroso é dado por $V_p = LA\phi$.

E a vazão, considerada constante em todo período de produção:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = q(x=0) = q_w \quad (2.102)$$

Derivando a pseudopressão, Equação (2.5), em relação à pressão, temos:

$$\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial p} = 2 \frac{p}{\mu Z} \quad (2.103)$$

Introduzindo-se a expressão do volume poroso, substituindo $\frac{\partial m(p)}{\partial p}$ na Equação 2.165 e em seguida derivando o resultado em relação ao tempo encontramos:

$$c_t LA\phi \frac{\mu Z}{2p} \frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.104)$$

A vazão nesse modelo é considerada constante em todo período de produção, logo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = q(x=0) = q_w \quad (2.105)$$

Sabendo que a vazão no poço em condições de reservatório é igual a:

$$q_w = q_{STD} B_g, \quad (2.106)$$

e o fator volume de formação do gás é:

$$B_g = \frac{Z T p_{STD}}{T_{STD} p} \quad (2.107)$$

chegamos a seguinte expressão para q_w :

$$q_w = q_{STD} \frac{Z T p_{STD}}{T_{STD} p} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.108)$$

Substituindo a Equação (2.108) na Equação (2.104):

$$\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial t} = \frac{k A T_{STD}}{2 p_{STD} q_{STD} T L} \frac{2}{c_t L A \phi \mu} q_{STD} \frac{T p_{STD}}{T_{STD}} \quad (2.109)$$

Adimensionalizando a Equação (2.109), chegamos a:

$$\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial t_D} = 1 \quad (2.110)$$

Logo a equação da difusividade hidráulica se torna:

$$\frac{\partial^2 \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = 1 \quad (2.111)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right) = 1 \quad (2.112)$$

Definindo $Y = \frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D}$ e substituindo na Equação (2.112) resulta em:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_D} = 1 \quad (2.113)$$

cuja integração produz:

$$Y = \frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} = x_D + C_1 \quad (2.114)$$

Utilizando a condição de contorno externa:

$$x_D = 1 \implies \left(\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0 \therefore 1 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -1$$

Então:

$$\frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D} = x_D + 1 \quad (2.115)$$

cuja integração fornece:

$$\theta(x_D, t_D) = \frac{1}{2} x_D^2 + x_D + C_2 \quad (2.116)$$

Aplicando a condição de contorno interna:

$$\theta(x_D = 0, t_D) = \theta_{w_D}(t_D) \quad (2.117)$$

a Equação (2.116), temos que:

$$\theta(x_D, t_D) = \frac{1}{2}x_D^2 + x_D + \theta_{w_D}(t_D) \quad (2.118)$$

Para determinar $\theta_{w_D}(t_D)$, utiliza-se a pressão média:

$$\Delta\theta(x_D, t_D) = \bar{\theta}(x_D, t_D) - \theta(x_D, 0) \quad (2.119)$$

e a partir da Equação (2.166), sabendo que:

$$\Delta t_D = t_D - 0 \quad (2.120)$$

chegamos a:

$$\Delta\theta(x_D, t_D) = t_D \quad (2.121)$$

A média ponderada da parcela correspondente ao regime pseudopermanente pode ser calculada por:

$$\bar{\theta}(x_D, t_D) = \frac{\int_0^1 \theta(x_D, t_D) dV_D}{\int_0^1 dV_D} \quad (2.122)$$

onde:

$$dV_D = \phi dx_D \quad (2.123)$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\bar{\theta}(x_D, t_D) = -\frac{1}{3} + \theta_{w_D}(t_D) \quad (2.124)$$

Igualando as Equações (2.121) e (2.124), obtém-se:

$$t_D = -\frac{1}{3} + \theta_{w_D}(t_D) \quad (2.125)$$

Logo:

$$\theta_{w_D}(t_D) = t_D + \frac{1}{3} \quad (2.126)$$

Substituindo o valor de $\theta_{w_D}(t_D)$ na Equação (2.116), temos que:

$$\theta(x_D, t_D) = \frac{x_D^2}{2} - x_D + t_D + \frac{1}{3} \quad (2.127)$$

2.1.2.3.2 Parte Transiente Como a EDH para a parcela de condição de contorno não homogênea, é dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial \theta(x_D, t_D)}{\partial t_D} = 1 \quad (2.128)$$

pela Equação (2.98) podemos concluir que:

$$\frac{\partial^2 \psi(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial \psi(x_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2.129)$$

Através do método de separação de variáveis podemos decompor a parcela relativa ao regime transiente em:

$$\psi(x_D, t_D) = X(x_D)T(t_D) \quad (2.130)$$

A Equação (2.129) em função de $X(x_D)$ e $T(t_D)$ é dada por:

$$T(t_D)X''(x_D) = X(x_D)T'(t_D) \quad (2.131)$$

A fim de satisfazer a expressão:

$$\frac{X_D''}{X_D} = -\lambda^2 = \frac{T_D'}{T_D} \quad (2.132)$$

ou seja:

$$X_D'' = -\lambda^2 X_D \quad (2.133)$$

$$T_D' = -\lambda^2 T_D \quad (2.134)$$

As condições inicial e de contorno são:

CI:

$$X(x_D)T(0) = -1 + x_D \quad (2.135)$$

CCI:

$$X'_D(0)T_D(t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.136)$$

Para de obter as soluções não-triviais:

$$X'_D(0) = 0 \quad (2.137)$$

CCE:

$$X'(1)T_D(t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.138)$$

ou:

$$X'_D(1) = 0 \quad (2.139)$$

As soluções de X_D e de T_D são respectivamente do tipo:

$$X_D(x_D) = m_1 e^{k_1 x_D} \quad (2.140)$$

$$T_D(t_D) = m_2 e^{k_2 t_D} \quad (2.141)$$

Assim, podemos calcular as constantes k_1 e k_2 , aplicando as Equações (2.140) e (2.141) nas Equações (2.133) e (2.134):

$$m_1^2 k_1^2 e^{k_1 x_D} = -m_1^2 \lambda^2 e^{k_1 x_D} \quad (2.142)$$

$$m_2 k_2 e^{k_2 t_D} = -m_2 \lambda^2 e^{k_2 t_D} \quad (2.143)$$

Como a função exponencial nunca é nula, chegamos as seguintes expressões para as constantes k_1 e k_2 :

$$k_1 = \sqrt{-\lambda^2} \quad (2.144)$$

$$k_2 = -\lambda^2 \quad (2.145)$$

Assim, substituindo a Equação (2.145) na Equação (2.141), obtem-se:

$$T_D(t_D) = m_2 e^{-\lambda^2 t_D} \quad (2.146)$$

Quando $t_D = 0$, temos:

$$T_D(0) = m_2 e^{-\lambda^2 0} = m_2 \quad (2.147)$$

consideraremos $m_2 = 1$, o que não influenciará na expressão final.

Para $X_D(x_D)$, a solução geral é conhecida e expressa por:

$$X_D(x_D) = A \sin(\lambda x_D) + B \cos(\lambda x_D) \quad (2.148)$$

Aplicando as condições de contorno (Equações 2.137 e 2.139) na solução, temos:

$$X_D(x_D) = A [\lambda \cos(\lambda x_D)]_{x_D=0} + B [-\lambda \sin(\lambda x_D)]_{x_D=0} = 0 \quad (2.149)$$

$$X_D(x_D) = A [\lambda \cos(\lambda x_D)]_{x_D=1} + B [-\lambda \sin(\lambda x_D)]_{x_D=1} = 0 \quad (2.150)$$

Resolvendo o sistema composto pelas Equações (2.149) e (2.150), chegamos a:

$$A = 0 \quad (2.151)$$

e

$$\lambda_n = n\pi, n = 1, 2, 3 \dots \infty \quad (2.152)$$

Assim, T_D e X_D são:

$$T_D(t_D) = e^{-(n\pi)^2 t_D} \quad (2.153)$$

$$X_D(x_D) = B \cos(n\pi x_D) \quad (2.154)$$

Empregando a condição inicial do problema na Equação (2.154) a fim de calcular a constante B , temos:

$$B \cos(n\pi x_D) = -\frac{x_D^2}{2} + x_D - \frac{1}{3}, t_D = 0 \quad (2.155)$$

É possível representar uma função periódica como uma soma de funções periódicas aplicando a série de Fourier, assim obtemos o seguinte resultado:

$$X_D(x_D) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n B \cos(n\pi x_D) \quad (2.156)$$

sendo:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(-\frac{x_D^2}{2} + x_D - \frac{1}{3} \right) \cos(n\pi x_D) dx_D \quad (2.157)$$

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \left(-\frac{x_D^2}{2} + x_D - \frac{1}{3} \right) dx_D \quad (2.158)$$

os coeficientes da série de Fourier de $X_D(x_D)$.

Como $0 \leq x_D \leq 1$:

$$L = 1 \quad (2.159)$$

Resolvendo as integrais (Equações 2.157 e 2.158):

$$A_n = -\frac{2}{(n\pi)^2} \quad (2.160)$$

$$A_0 = 0 \quad (2.161)$$

Assim:

$$X_D(x_D) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x_D) \quad (2.162)$$

A solução da Equação (2.130) é:

$$\psi_D(x_D, t_D) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x_D) e^{-(n\pi)^2 t_D} \quad (2.163)$$

Substituindo as expressões encontradas para $\psi(x_D, t_D)$ e $\theta(x_D, t_D)$ na Equação (2.97), chega-se a solução completa, dada pela seguinte expressão:

$$m_D(x_D, t_D) = \frac{x_D^2}{2} - x_D + t_D + \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x_D) e^{-(n\pi)^2 t_D} \quad (2.164)$$

2.1.2.3.3 Reservatório Selado em Tempos Longos de Produção Esta seção desenvolve a solução para reservatório selado e é válida apenas em longos períodos de produção. Nesse regime de fluxo, a produção é resultado da expansão do fluido e da contração do volume poroso. A solução da EDH para esse tipo de problema é encontrada utilizando a compressibilidade total do sistema:

$$c_t = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial V}{\partial m(p)} \frac{\partial m(p)}{\partial p} \quad (2.165)$$

onde o volume poroso é calculado por $V_p = LA\phi$.

Assim, após algumas manobras algébricas, mostradas no desenvolvimento da solução para reservatório selado em qualquer tempo, podemos chegar a:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = 1 \quad (2.166)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial x_D^2} = 1 \quad (2.167)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} \right) = 1 \quad (2.168)$$

Definindo $Y = \frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D}$ e substituindo na Equação (2.168) resulta em:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_D} = 1 \quad (2.169)$$

cuja integração produz:

$$Y = \frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} = x_D + C_1 \quad (2.170)$$

Utilizando a condição de contorno externa:

$$x_D = 1 \implies \left(\frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right)_{x_D=1} = 0 \therefore 1 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -1$$

Então:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial x_D} = x_D + 1 \quad (2.171)$$

cuja integração fornece:

$$m_D(p) = \frac{1}{2}x_D^2 + x_D + C_2 \quad (2.172)$$

Aplicando a condição de contorno interna:

$$m_D(x_D = 0, t_D) = m_{w_D}(t_D) \quad (2.173)$$

Para se obter uma relação entre a pressão no poço e o tempo de produção, expressa através de $m_{w_D}(t_D)$, é necessário o conceito de pressão média ($\overline{m_D}(p)$):

$$\Delta m_D(p) = \overline{m_D}(p) - m_D(p_i) \quad (2.174)$$

e de tempo médio:

$$\Delta t_D = t_D - 0 \quad (2.175)$$

Um meio poroso inicialmente a uma pressão p_i , ao produzir durante um período de tempo, tem sua pressão média reduzida para um valor $\overline{m_D}(p)$.

A partir da Equação (2.110) e da condição inicial, chegamos a:

$$\Delta m_D(p) = t_D \quad (2.176)$$

A pseudopressão média adimensional também pode ser calculada a partir da (2.5):

$$\overline{m_D}(p) = \frac{\int_0^1 m_D(p) dV_D}{\int_0^1 dV_D}$$

onde:

$$dV_D = \phi dx_D \quad (2.177)$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\overline{m}_D(p) = -\frac{1}{3} + m_{wD}(t_D) \quad (2.178)$$

Igualando as Equações (2.176) e (2.178), obtém-se:

$$t_D = -\frac{1}{3} + m_{wD}(t_D) \quad (2.179)$$

Logo:

$$m_{wD}(t_D) = t_D + \frac{1}{3} \quad (2.180)$$

Substituindo $m_{wD}(t_D)$ na Equação (2.172), temos que a solução da equação da difusividade hidráulica, para reservatórios com fronteira selada em longos períodos de produção, é:

$$m_D(p) = \frac{x_D^2}{2} - x_D + t_D + \frac{1}{3} \quad (2.181)$$

2.1.3 Fluxo Radial

A equação diferencial que modela o escoamento radial (Figura 5) é dada por:

$$\frac{\partial^2 m_D(p)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_D(p)}{\partial r_D} = \frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} \quad (2.182)$$

Neste trabalho as soluções para a Equação (2.182) foram obtidas utilizando o método de transformadas de Laplace.

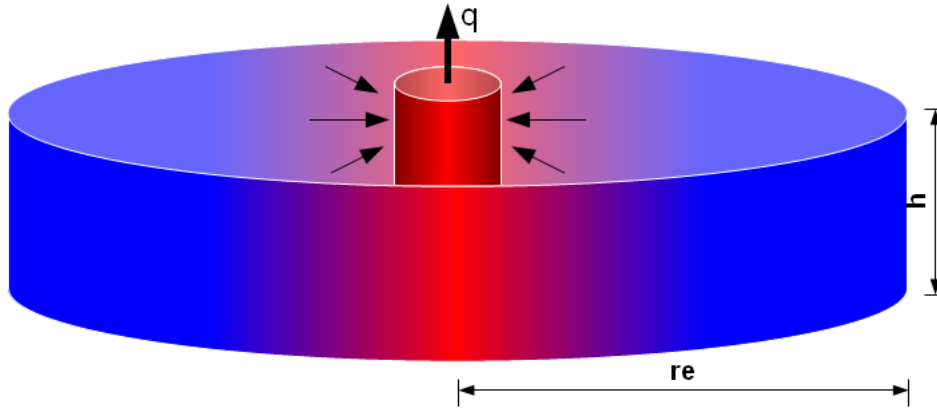


Figura 5: Modelo de Reservatório Radial

Dada uma função $f(t)$ definida no intervalo $[0, \infty)$ representamos sua transformada de Laplace como:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2.183)$$

Aplicando a transformada de Laplace à pseudopressão, Equação (2.5):

$$\mathcal{L}\{m_D(r_D, t_D)\} = \int_0^{\infty} m_D(r_D, t_D) e^{-zt_D} dt_D = \overline{m_D}(r_D, z) \quad (2.184)$$

e a Equação (2.182), obtemos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2}\right\} = \frac{d^2}{dr_D^2} \overline{m_D}(r_D, z) \quad (2.185)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right\} = \frac{d}{dr_D} \overline{m_D}(r_D, z) \quad (2.186)$$

Sabendo que a condição inicial é dada por:

CI:

$$m_D(r_D, t_D = 0) = 0, r_D > 0 \quad (2.187)$$

e que $\lim_{t_D \rightarrow \infty} e^{-zt_D} = 0$, vem:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D}\right\} = [m_D(r_D, t_D) e^{-zt_D}] \Big|_0^{\infty} + z \overline{m_D}(r_D, z) = z \overline{m_D}(r_D, z) \quad (2.188)$$

Assim, a equação da difusividade hidráulica, no domínio de Laplace, assume a seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dr_D^2} \overline{m}_D(r_D, z) + \frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \overline{m}_D(r_D, z) = z \overline{m}_D(r_D, z) \quad (2.189)$$

A solução para a Equação (2.189) é dada por:

$$\overline{m}_D(r_D, z) = AI_0(r_D\sqrt{z}) + BK_0(r_D\sqrt{z}) \quad (2.190)$$

onde:

A, B: constantes a determinar segundo as condições de contorno

I_0 : função modificada de Bessel de primeira espécie de ordem zero

k_0 : função modificada de Bessel de segunda espécie de ordem zero

I_1 : função modificada de Bessel de primeira espécie de ordem um

k_1 : função modificada de Bessel de segunda espécie de ordem um

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, t_D > 0 \quad (2.191)$$

A condição de contorno interna estabelece que a solução seja desenvolvida considerando a vazão no poço constante. Aplicando a transformada de Laplace na condição de contorno interna, temos:

$$\left[r_D \frac{d}{dr_D} \overline{m}_D(r_D, z) \right]_{r_D=1} = -\frac{1}{z} \quad (2.192)$$

Derivando a Equação (2.190), em relação a r_D , sabendo que:

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x) \quad (2.193)$$

e

$$\frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x) \quad (2.194)$$

obtém-se a seguinte expressão:

$$\left[r_D \frac{d}{dr_D} \overline{m}_D(r_D, z) \right]_{r_D=1} = \{ r_D [A\sqrt{z}I_1(r_D\sqrt{z}) - B\sqrt{z}K_1(r_D\sqrt{z})] \}_{r_D=1} = -\frac{1}{z} \quad (2.195)$$

que pode ser simplificada para:

$$A\sqrt{z}I_1(r_D\sqrt{z}) - B\sqrt{z}K_1(r_D\sqrt{z}) = -\frac{1}{z} \quad (2.196)$$

2.1.3.1 Regime Transiente

As equações para o regime transiente são obtidas supondo que o meio poroso seja infinito lateralmente, tenha uma espessura h uniforme, e produza através de um único poço (Figura 6).

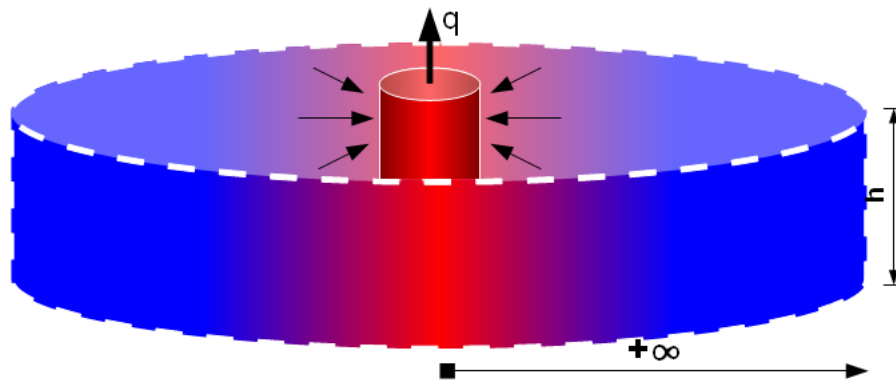


Figura 6: Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Transiente

Para o regime transiente o reservatório, em qualquer tempo de produção, sempre haverá um ponto do reservatório em que a pressão é igual a p_i . Assim a condição de contorno externa é dada por:

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_D(r_D, t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.197)$$

Aplicando a transformada de Laplace na CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{m}_D(r_D, z) = 0 \quad (2.198)$$

e substituindo a Equação (2.190), encontramos:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} [AI_0(r_D\sqrt{z}) + BK_0(r_D\sqrt{z})] = 0 \quad (2.199)$$

Como $\lim_{r_D \rightarrow \infty} I_0(r_D\sqrt{z}) = \infty$ e $\lim_{r_D \rightarrow \infty} K_0(r_D) = 0$, então:

$$A = 0$$

Assim:

$$\overline{m_D}(r_D, z) = BK_0(r_D\sqrt{z}) \quad (2.200)$$

Aplicando a CCI a Equação (2.200), chegamos a:

$$B = \frac{1}{z\sqrt{z}K_1(\sqrt{z})}$$

Dessa forma, solução do problema, no domínio de Laplace, é dada por:

$$\overline{m_D}(r_D, z) = \frac{K_0(r_D\sqrt{z})}{z\sqrt{z}K_1(\sqrt{z})} \quad (2.201)$$

2.1.3.2 Reservatório com Alimentação Externa

Este problema representa o movimento de fluido em um meio poroso cilíndrico, de raio externo r_e e altura h , submetido a alimentação externa (Figura 7).

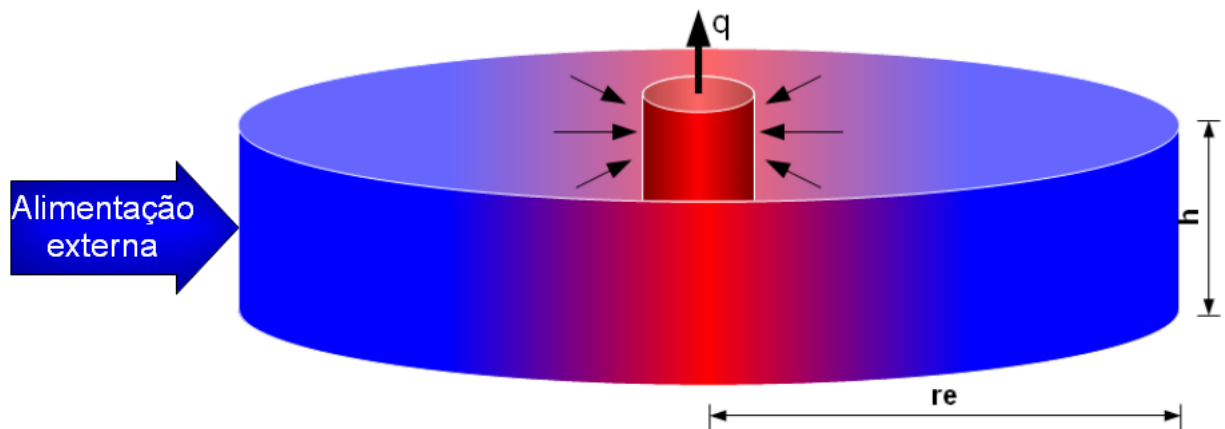


Figura 7: Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Permanente

A condição de contorno externa é dada por:

CCE:

$$m_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0, t_D > 0 \quad (2.202)$$

Aplicando a transformada de Laplace à CCE:

$$\overline{m}_D(r_D = r_{eD}, z) = 0 \quad (2.203)$$

e substituindo na (2.190), vem

$$AI_0(r_{eD}\sqrt{z}) + BK_0(r_{eD}\sqrt{z}) = 0 \quad (2.204)$$

conhecendo a CCI, (2.196), é possível encontrar:

$$A = -B \frac{K_0(r_{eD}\sqrt{z})}{I_0(r_{eD}\sqrt{z})}$$

e

$$B = \frac{I_0(r_{eD}\sqrt{z})}{z\sqrt{z} [I_1(\sqrt{z})K_0(r_{eD}\sqrt{z}) + K_1(\sqrt{z})I_0(r_{eD}\sqrt{z})]}$$

Portanto, a solução desse caso é

$$\overline{m}_D(r_D, z) = \frac{-K_0(r_{eD}\sqrt{z})I_0(r_D\sqrt{z}) + I_0(r_{eD}\sqrt{z})K_0(r_D\sqrt{z})}{z\sqrt{z} [I_1(\sqrt{z})K_0(r_{eD}\sqrt{z}) + K_1(\sqrt{z})I_0(r_{eD}\sqrt{z})]} \quad (2.205)$$

2.1.3.2.1 Reservatório com Alimentação Externa em Tempos Longos de Produção Em um reservatório com manutenção de pressão nas fronteiras, a pressão não varia com o tempo, dessa forma:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = 0 \quad (2.206)$$

Substituindo a Equação (2.206) na Equação (2.182), temos:

$$\frac{d^2 m_D(p)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dm_D(p)}{dr_D} = 0 \quad (2.207)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left(r_D \frac{dm_D(p)}{dr_D} \right) = 0 \quad (2.208)$$

cuja solução é:

$$r_D \frac{dm_D(p)}{dr_D} = C_1 \quad (2.209)$$

A integração da Equação (2.209) resulta em:

$$m_D(p) = C_1 \ln r_D + C_2 \quad (2.210)$$

Aplicando as condições de contorno encontramos expressões para C_1 e C_2 :

$$r_D = 1 \implies \left(r_D \frac{\partial m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \therefore \left(r_D \frac{C_1}{r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \rightarrow C_1 = -1$$

$$r_D = r_{eD} \implies m_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0 \therefore C_1 \ln r_{eD} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\ln r_{eD}$$

Portanto, a solução da equação da difusividade para fluxo radial em reservatório com alimentação externa, em longos períodos de produção, é dada por:

$$m_D(p) = \ln \left(\frac{r_{eD}}{r_D} \right) \quad (2.211)$$

2.1.3.3 Reservatório Selado

Para a dedução das Equações para fluxo radial em um meio poroso cilíndrico com a lateral externa selada (Figura 8):

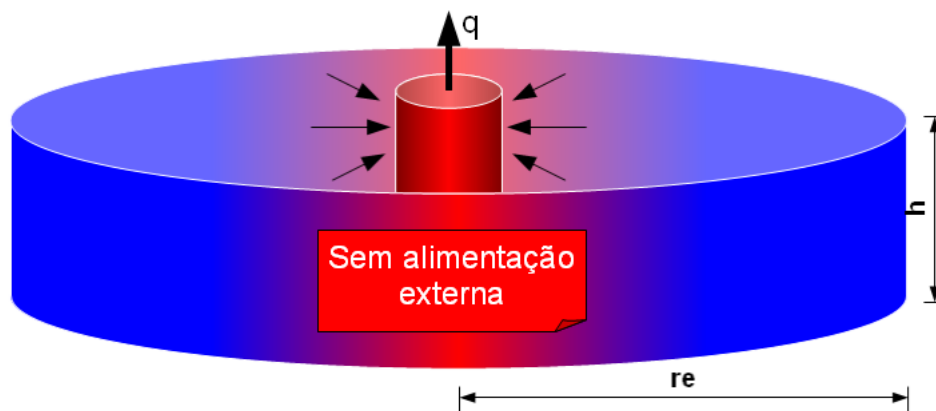


Figura 8: Modelo de Reservatório em Fluxo Radial Pseudopermanente

Neste caso temos a seguinte condição de contorno externa:

CCE:

$$\left(r_D \frac{\partial m_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{eD}} = 0, t_D > 0 \quad (2.212)$$

Aplicando a transformada de Laplace na CCE:

$$\left(r_D \frac{d}{dr_D} \overline{m}_D(r_D, z) \right)_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad (2.213)$$

e substituindo na Equação (2.190) encontramos:

$$\left\{ r_D [A\sqrt{z}I_1(r_D\sqrt{z}) - B\sqrt{z}K_1(r_D\sqrt{z})] \right\}_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad (2.214)$$

Conhecendo a CCI, Equação (2.196), obtemos:

$$A = B \frac{K_1(r_{eD}\sqrt{z})}{I_1(r_{eD}\sqrt{z})}$$

e

$$B = \frac{I_1(r_{eD}\sqrt{z})}{z\sqrt{z} [K_1(\sqrt{z})I_1(r_{eD}\sqrt{z}) + I_1(\sqrt{z})K_1(r_{eD}\sqrt{z})]}$$

Dessa forma encontramos a solução para fluxo radial e reservatório selado na fronteira, em qualquer tempo de produção:

$$\overline{m}_D(r_D, z) = \frac{K_1(r_{eD}\sqrt{z})I_0(r_D\sqrt{z}) + I_1(r_{eD}\sqrt{z})K_0(r_D\sqrt{z})}{z\sqrt{z} [K_1(\sqrt{z})I_1(r_{eD}\sqrt{z}) - I_1(\sqrt{z})K_1(r_{eD}\sqrt{z})]} \quad (2.215)$$

2.1.3.3.1 Reservatório Selado em Tempos Longos de Produção A solução para esse tipo de problema é válido apenas em períodos longos de produção e, assim como no caso do fluxo linear, parte da equação da compressibilidade:

$$c_t = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial V}{\partial m(p)} \frac{\partial m(p)}{\partial p} \quad (2.216)$$

Derivando a pseudopressão, Equação (2.5), em relação à pressão, temos:

$$\frac{\partial m(p)}{\partial p} = 2 \frac{p}{\mu Z} \quad (2.217)$$

Substituindo $\frac{\partial m(p)}{\partial p}$ na Equação (2.216):

$$c_t = -\frac{2}{V_p} \frac{\partial V}{\partial m(p)} \frac{p}{\mu Z} \quad (2.218)$$

O volume poroso para reservatório radial é dado por:

$$V_p = \pi r_e^2 h \phi \quad (2.219)$$

Introduzindo a expressão do volume poroso na Equação (2.218) e em seguida derivando-se o resultado em relação ao tempo obtém-se:

$$c_t \pi r_e^2 h \phi \frac{\mu Z}{2p} \frac{\partial m(p)}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.220)$$

A variação de volume em relação ao tempo é igual à vazão medida no ponto $x = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = q(r=0) = q_w = \text{constante} \quad (2.221)$$

Sabendo que a vazão no poço em condições de reservatório é igual a:

$$q_w = q_{STD} B_g \quad (2.222)$$

onde o fator volume de formação do gás:

$$B_g = \frac{Z T p_{STD}}{T_{STD} p} \quad (2.223)$$

Assim:

$$q_w = q_{STD} \frac{Z T p_{STD}}{T_{STD} p} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.224)$$

Substituindo a Equação (2.224) na Equação (2.220):

$$\frac{\partial m(p)}{\partial t} = -\frac{2}{c_t \pi r_e^2 h \phi \mu} q_{STD} \frac{T p_{STD}}{T_{STD}} \quad (2.225)$$

Adimensionalizando a Equação (2.225), vem:

$$\frac{\partial m_D(p)}{\partial t_D} = \frac{2}{r_{eD}^2} \quad (2.226)$$

Logo a equação da difusividade hidráulica se torna:

$$\frac{d^2 m_D(p)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dm_D(p)}{dr_D} = \frac{2}{r_{eD}^2} \quad (2.227)$$

podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dr_D} \left(r_D \frac{dm_D(p)}{dr_D} \right) = \frac{2}{r_{eD}^2} r_D \quad (2.228)$$

Definindo-se:

$$r_D \frac{dm_D(p)}{dr_D} = Y \quad (2.229)$$

tem-se:

$$\frac{d}{dr_D} (Y) = \frac{2}{r_{eD}^2} r_D \quad (2.230)$$

cuja integração resulta em:

$$Y = \frac{1}{r_{eD}^2} r_D^2 + C_1 \quad (2.231)$$

Assim:

$$r_D \frac{dm_D(p)}{dr_D} = \frac{1}{r_{eD}^2} r_D^2 + C_1 \quad (2.232)$$

Integrando a Equação (2.232) em relação a r_D :

$$m_D(p) = \frac{1}{2r_{eD}^2} r_D^2 + C_1 \ln r_D + C_2 \quad (2.233)$$

Aplicando as condições de contorno na Equação (2.233), temos:

$$r_D = 1 \implies \left(r_D \frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \therefore \left(\frac{1}{r_{eD}^2} r_D^2 + C_1 \right)_{r_D=1} = -1 \rightarrow C_1 = -1 - \frac{1}{r_{eD}^2}$$

$$r_D = r_{eD} \implies \left(r_D \frac{\partial m_D(x_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{eD}} = 0 \therefore \left(\frac{1}{r_{eD}^2} r_D^2 + C_1 \right)_{r_D=r_{eD}} = 0 \rightarrow C_1 = -1$$

Substituindo o valor encontrado para C_1 na Equação (2.233) chegamos a:

$$m_D(p) = \frac{1}{2r_{eD}^2} r_D^2 - \ln r_D + C_2 \quad (2.234)$$

Aplicando a condição de contorno interna:

$$m_D(r_D = 1, t_D) = m_{wD}(t_D) \quad (2.235)$$

à Equação (2.234), temos que:

$$m_D(p) = \frac{1}{2r_{eD}^2} r_D^2 - \ln r_D + m_{wD}(t_D) \quad (2.236)$$

Para se obter uma relação entre a pressão no poço e o tempo de produção, é necessário o conceito de pressão média ($\overline{m_D}(p)$):

$$\Delta m_D(p) = \overline{m_D}(p) - m_D(p_i) \quad (2.237)$$

e de tempo médio:

$$\Delta t_D = t_D - 0 \quad (2.238)$$

Assim, segundo a Equação (2.226):

$$\Delta m_D(p) = \frac{2}{r_{eD}^2} t_D \quad (2.239)$$

A pseudopressão média adimensional pode ser calculada através de uma média ponderada:

$$\overline{m_D}(p) = \frac{\int_1^{r_{eD}} m_D(p) dV_D}{\int_1^{r_{eD}} dV_D} \quad (2.240)$$

onde o volume poroso adimensional é:

$$dV_D = \phi r_D dr_D \quad (2.241)$$

Resolvendo a integral, Equação (2.240), obtém-se:

$$\overline{m}_D(p) = -\ln r_{eD} + \frac{3}{4} + m_{wD}(t_D) \quad (2.242)$$

Igualando as Equações (2.239) e (2.242), temos:

$$\frac{2}{r_{eD}^2} t_D = -\ln r_{eD} + \frac{3}{4} + m_{wD}(t_D) - m_D(p_i) \quad (2.243)$$

Logo:

$$m_{wD}(t_D) = \ln r_{eD} + \frac{2t_D}{r_{eD}^2} - \frac{3}{4} + m_D(p_i) \quad (2.244)$$

Substituindo $m_{wD}(t_D)$ na Equação (2.234), chegamos a solução para o regime pseudopermanente para tempos longos:

$$m_D(p) = m_D(p_i) + \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_D}{r_{eD}} \right)^2 - \ln r_D + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad (2.245)$$

3 *Resultados e Análises*

Neste trabalho foi resolvida a EDH em função da pseudopressão, para fluxo radial e linear, em diversas condições de contorno externas, gerando soluções válidas para qualquer tempo. Também foram desenvolvidas as soluções aproximadas, válidas apenas para tempos iniciais ou para longos períodos de tempo. Paralelo ao desenvolvimento das soluções da EDH para gases (Capítulo 2), foi construído um algoritmo (Figura 9), a fim de implementá-las.

A princípio os parâmetros do reservatório, preenchidos pelo usuário em uma planilha de Excel, são lidos pelo programa. No menu inicial, temos duas opções bem distintas: gerar tabela de pressão por pseudopressão, em um range de pressões escolhido pelo usuário, ou plotar as soluções da EDH. Para a segunda opção, o programa permite a escolha da geometria do reservatório e dos regimes de fluxo.

Para o cálculo da pseudopressão em diversas faixas de pressão e do produto viscosidade *versus* compressibilidade do gás real avaliado a pressão inicial do sistema, foi necessário empregar correlações para duas importantes propriedades do gás real: viscosidade e fator de compressibilidade. O programa possibilita a escolha das correlações de Lee et al. (1966) Jossi et al. (1962) Londono et al. (2002) Carr et al. () para viscosidade e para o fator de desvio do gás real Beggs e Brill (1973), Hall e Yarborough (1973), Dranchuk e Abou-Kassem (1975), Nishiumi e Saito (1975) e Dranchuk & Abou-Kassem otimizado.

O algoritmo trabalha com as soluções em função da pseudopressão. Através da tabela que correlaciona a pseudopressão com a pressão utilizando o conceito introduzido por Al-Hussainy et al. (1966), é possível obter os perfis de pressão no reservatório ao longo do tempo.

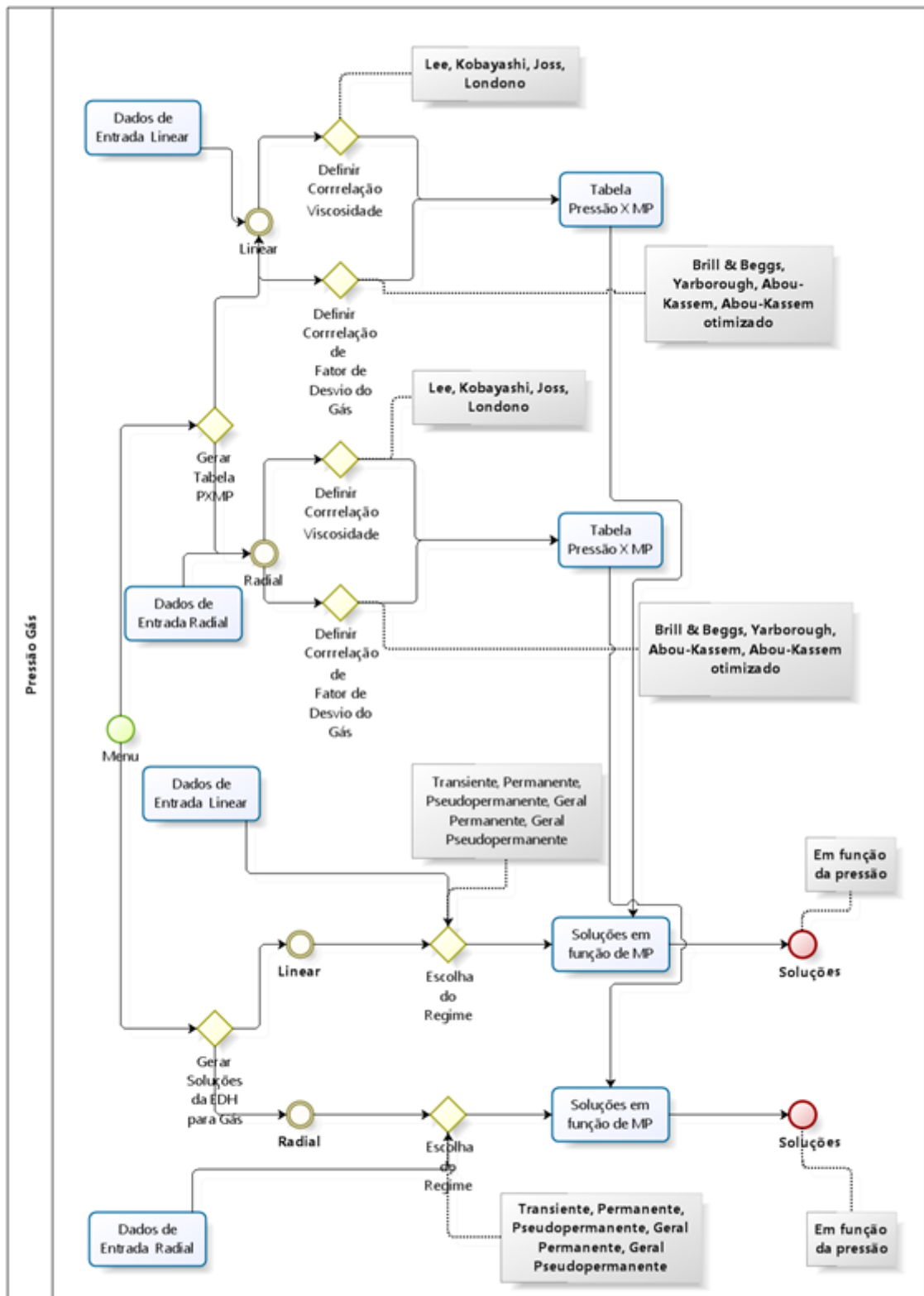


Figura 9: Fluxograma representando os processos e componentes implementados

3.1 Fluxo Linear

As características do reservatório e do fluido, utilizadas para calcular o comportamento da pseudopressão em fluxo linear, encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do Reservatório para Fluxo Linear

| | |
|---|-------------------------------|
| Pressão inicial (P_a) | $2,84 \times 10^7$ |
| Permeabilidade da formação (m^2) | $4,93 \times 10^{-15}$ |
| Vazão de gás ($STD\ m^3/s$) | 3 |
| Espessura da formação (m) | 50 |
| Porosidade | 0,25 |
| Comprimento arbitrário (m) | 5000 |
| Largura da formação (m) | 1000 |
| Temperatura padrão (K) | 289 |
| Pressão padrão (P_a) | $1,013 \times 10^4$ |
| Massa aparente do gás natural | 20 |
| Temperatura do sistema (K) | 389 |
| Viscosidade do gás ($Pa.s$) | $3,799 \times 10^{-5}$ |
| Compressibilidade do gás na pressão inicial (Pa^{-1}) | $2,220 \times 10^{-4}$ |
| Correlação para viscosidade | (LEE et al., 1966) |
| Correlação para fator de desvio do gás real | (DRANCHUK; ABOU-KASSEM, 1975) |

3.1.1 Reservatório com Alimentação Externa

Na Figura 10 podemos ver a solução para um reservatório com alimentação externa em tempos iniciais, em vermelho, comparada à solução do regime transiente, em azul. A boa concordância entre os resultados era esperada, uma vez que todo reservatório no início da produção de fluidos se comporta como infinito.

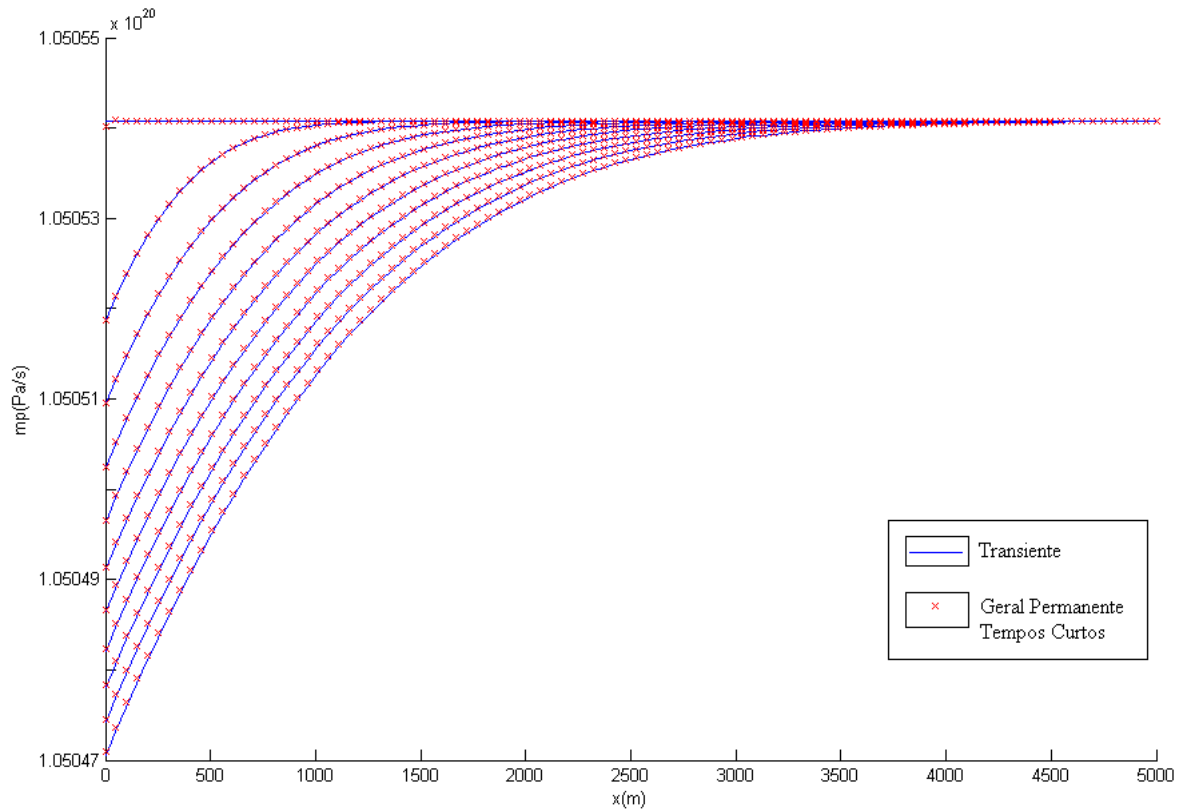


Figura 10: Solução Reservatório com Alimentação Externa Linear - Tempos Curtos

A comparação entre a solução para tempos longos e a solução aproximado do regime permanente é mostrada na Figura 11. Vemos que a solução aproximada, em azul, possui apenas uma curva, o que mostra a não dependência do regime permanente com o tempo. O mesmo não acontece com a outra solução, que é válida desde os instantes iniciais, reservatório com comportamento infinito, até longo períodos de produção onde ela se assemelha a solução aproximada.

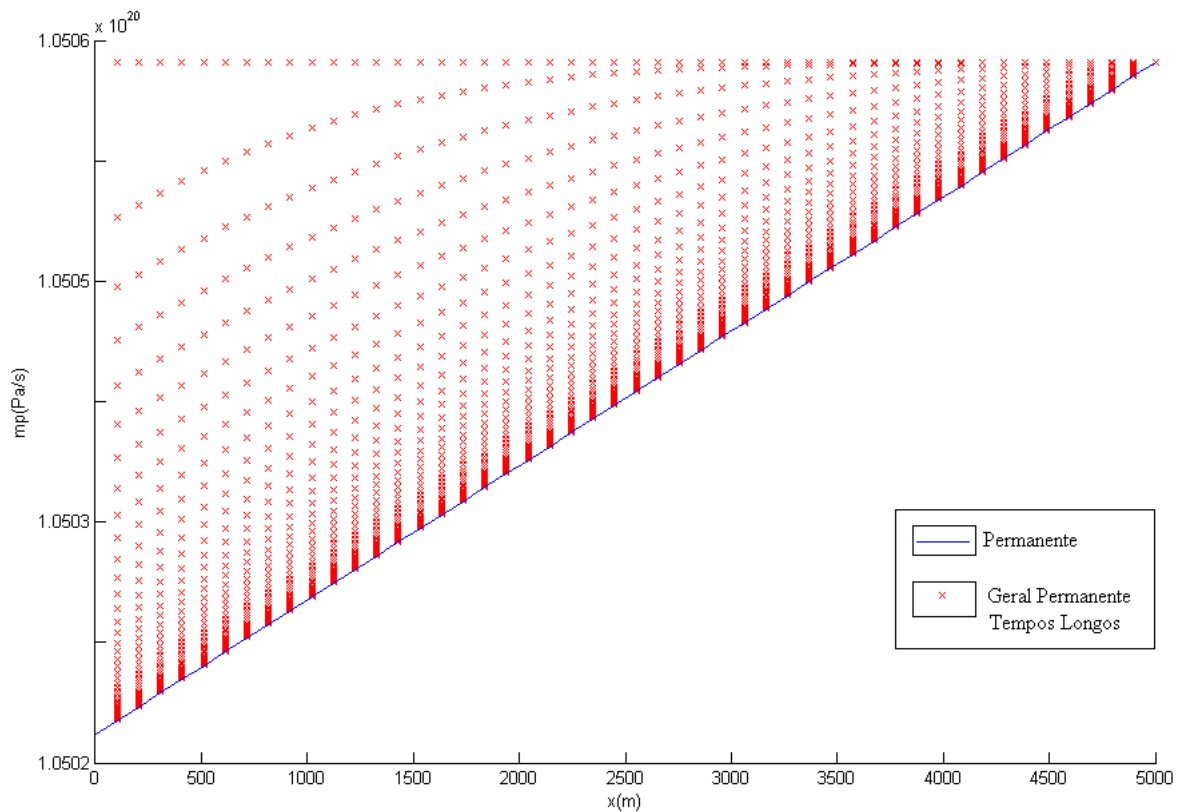


Figura 11: Solução Reservatório com Alimentação Externa Linear - Tempos Longos

3.1.2 Reservatório Selado

A Figura 12 apresenta a solução do regime pseudopermanente em tempos iniciais de produção, em vermelho, nela também se encontra a solução do regime transiente (em azul). Como foi visto na seção anterior, as duas soluções apresentaram boa concordância, uma vez que, independente da condição de contorno externa, em tempos curtos de produção todo reservatório se comporta como infinito e a solução do transiente é válida.

Comparando a solução para reservatório selado nas fronteiras em tempos longos com a solução aproximada do regime pseudopermanente vemos que a partir do momento que a pressão decai na fronteira do reservatório as soluções são iguais (Figura 13).

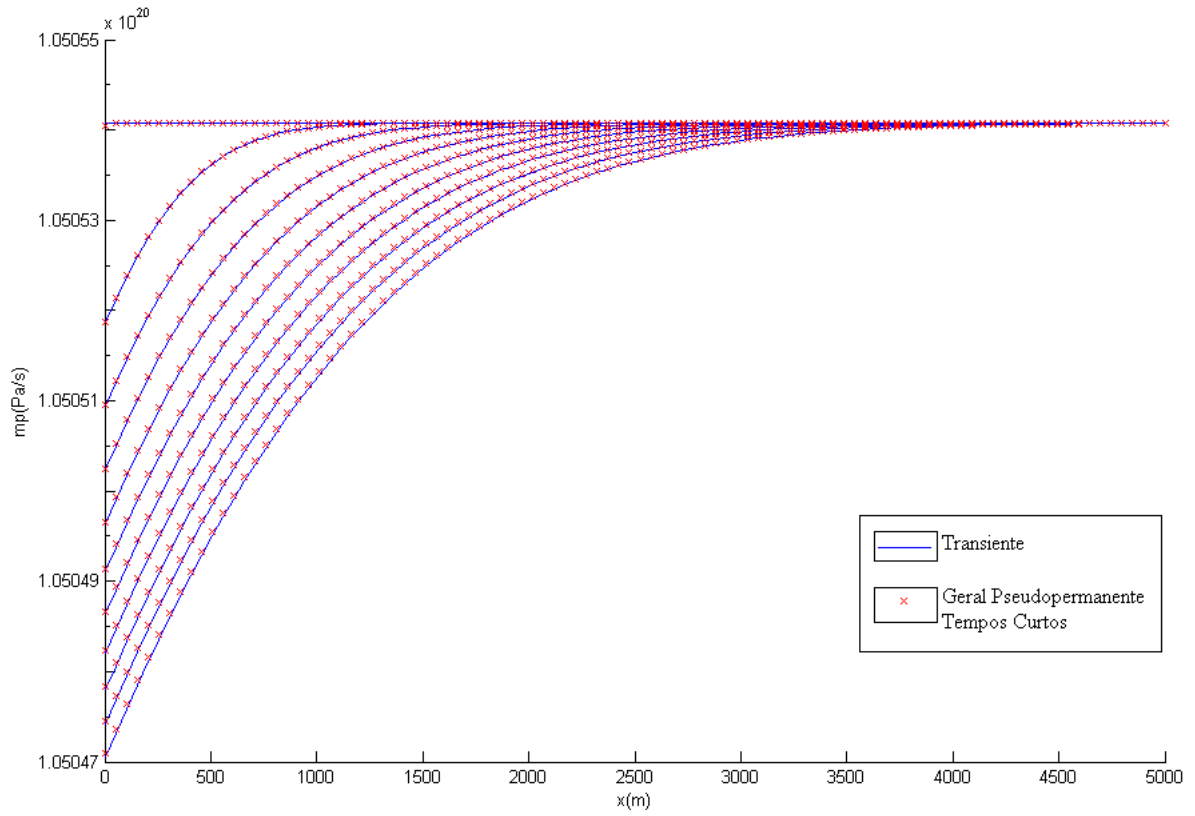


Figura 12: Solução Reservatório Selado Linear - Tempos Curtos

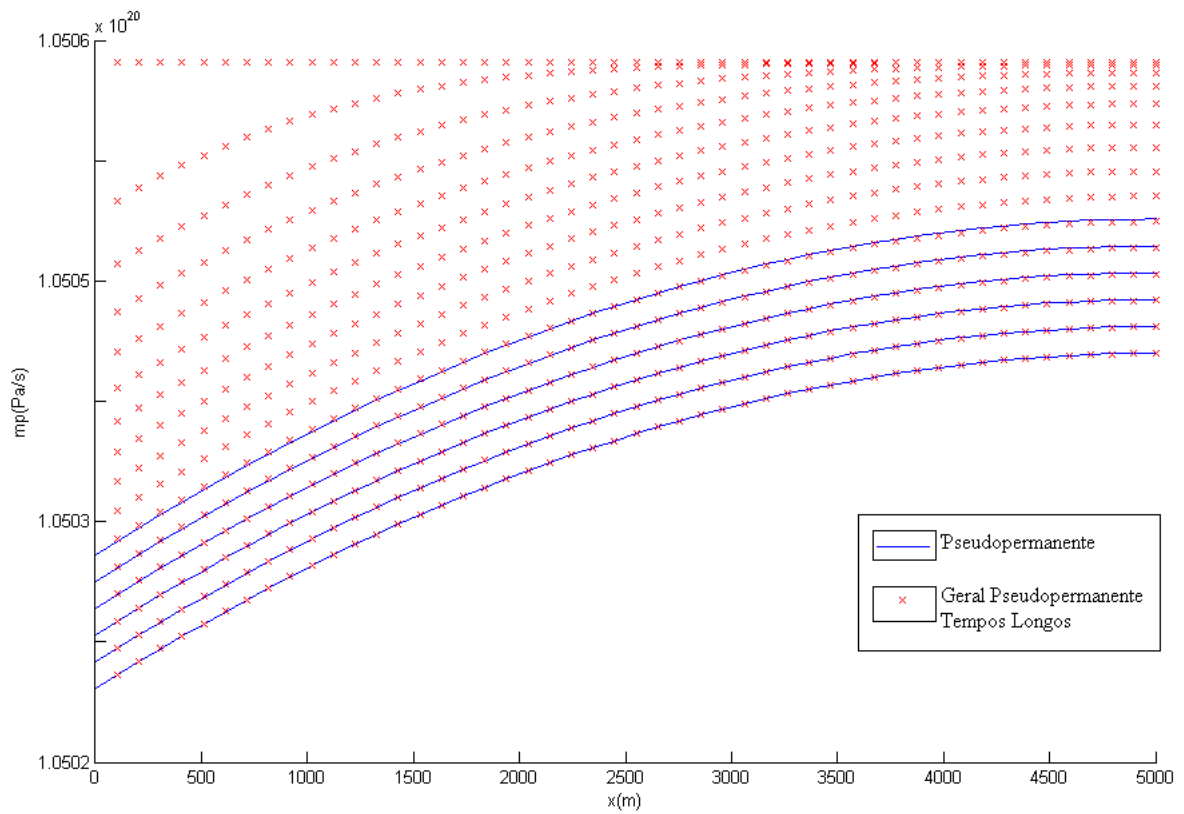


Figura 13: Solução Reservatório Selado Linear - Tempos Longos

3.2 Fluxo Radial

Para inverter as soluções do domínio de Laplace para o domínio real foi utilizado o algoritmo de Stehfest (STEHFEST, 1970). As propriedades do reservatório e do gás, utilizadas para calcular o comportamento da pseudopressão nas diversas condições de contorno externa, encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do Reservatório para Fluxo Radial

| | |
|---|------------------------|
| Pressão inicial (Pa) | $2,84 \times 10^7$ |
| Permeabilidade da formação (m^2) | $4,93 \times 10^{-15}$ |
| Vazão de gás ($STD m^3/s$) | 3 |
| Espessura da formação (m) | 50 |
| Porosidade | 0,25 |
| Raio externo(m) | 5000 |
| Raio do poço (m) | 0,1 |
| Temperatura padrão (K) | 289 |
| Pressão padrão (Pa) | $1,013 \times 10^4$ |
| Massa aparente do gás natural | 20 |
| Temperatura do sistema (K) | 389 |
| Viscosidade do gás ($Pa.s$) | $3,799 \times 10^{-5}$ |
| Compressibilidade do gás na pressão inicial (Pa^{-1}) | $2,222 \times 10^{-4}$ |
| Correlação para viscosidade | (LEE et al., 1966) |
| Correlação para fator de desvio do gás real | (BEGGS; BRILL, 1973) |

3.2.1 Reservatório com Alimentação Externa

Como realizado na seção de fluxo linear, Na Figura 14 são comparadas a solução do regime transiente com a a solução para reservatórios com alimentação externa em instantes iniciais de produção, como era esperado as soluções nesse período se equivalem. A Figura 15 ilustra a solução em tempos longos, em vermelho, se aproximando da solução limitada do regime permanente, em azul, a medida que o tempo de produção vai aumentando.

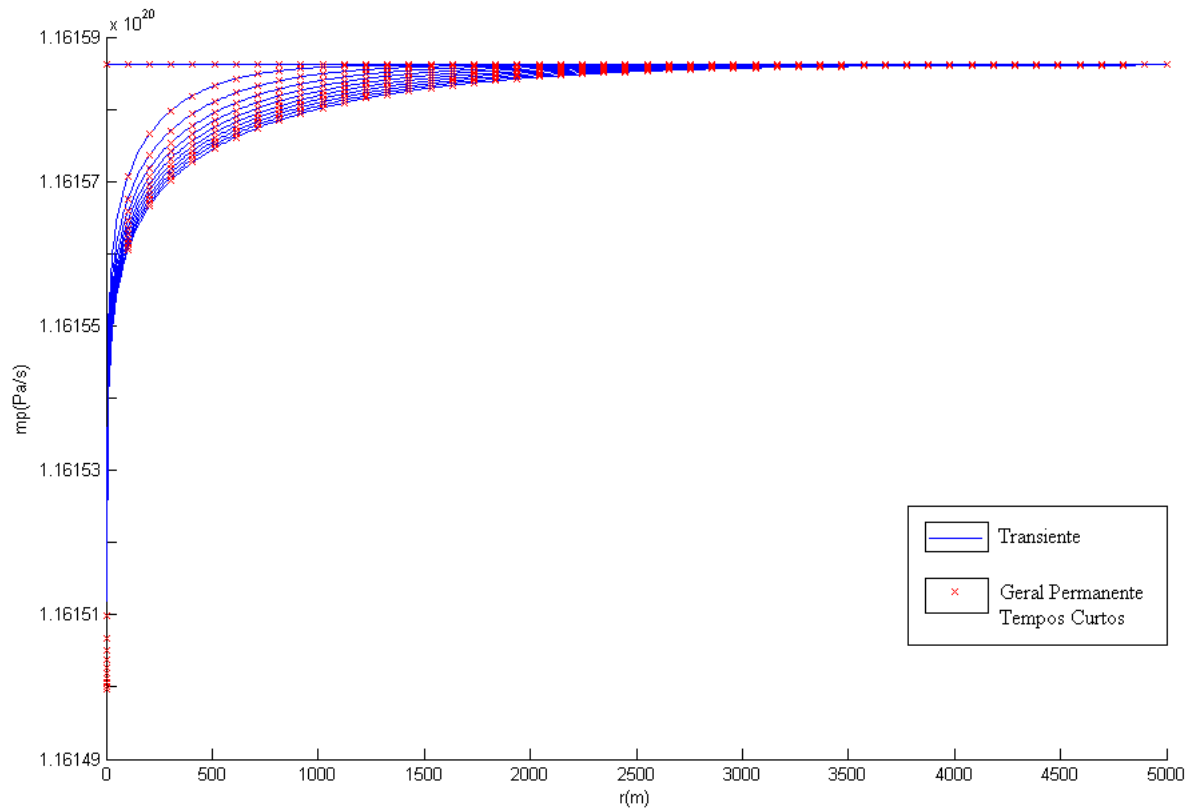


Figura 14: Solução Reservatório com Alimentação Externa Radial - Tempos Curtos

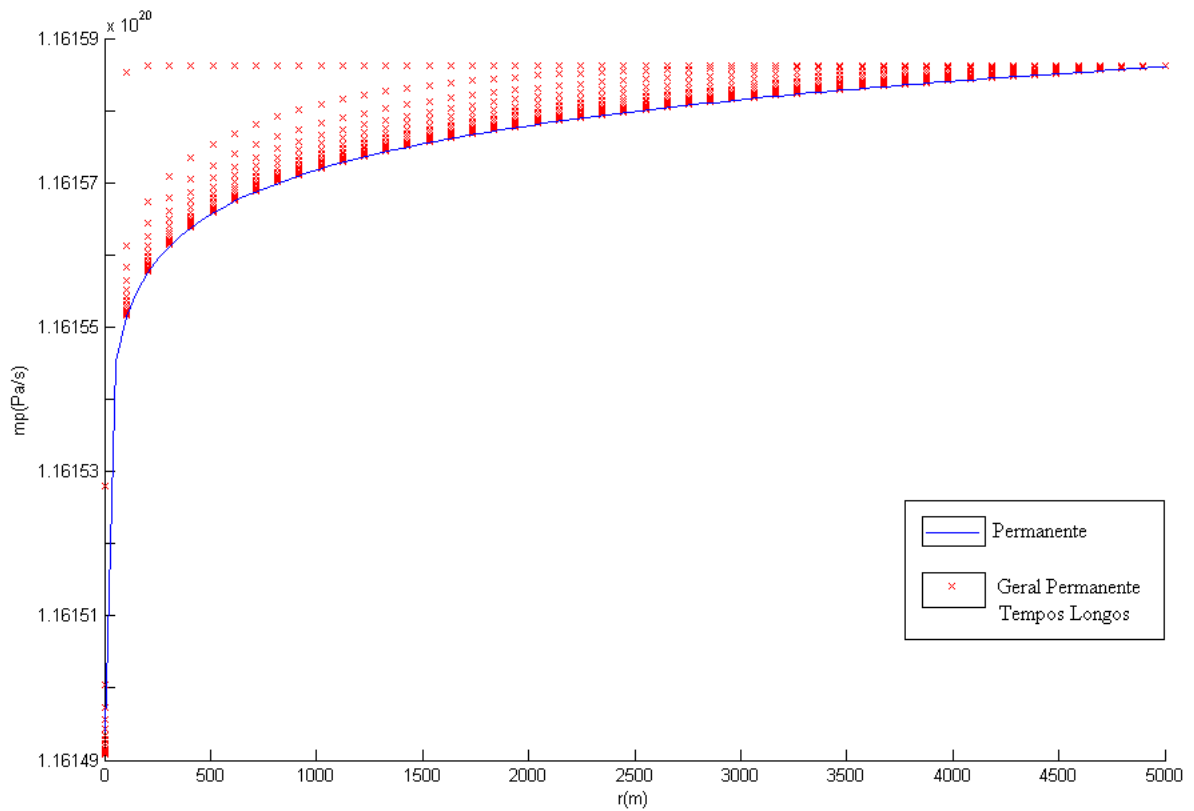


Figura 15: Solução Reservatório com Alimentação Externa Radial - Tempos Longos

3.2.2 Reservatório Selado

Na Figura 16 vemos a solução para reservatório radial sem fluxo na fronteira externa em curtos tempos comparada à solução que considera o reservatório como infinito, e, mais uma vez é comprovado esse comportamento em instantes iniciais de produção. Em tempos longos, quando o regime pseudopermanente está completamente estabelecido, a soluções completa e aproximada para esse regime são iguais (Figura 17).

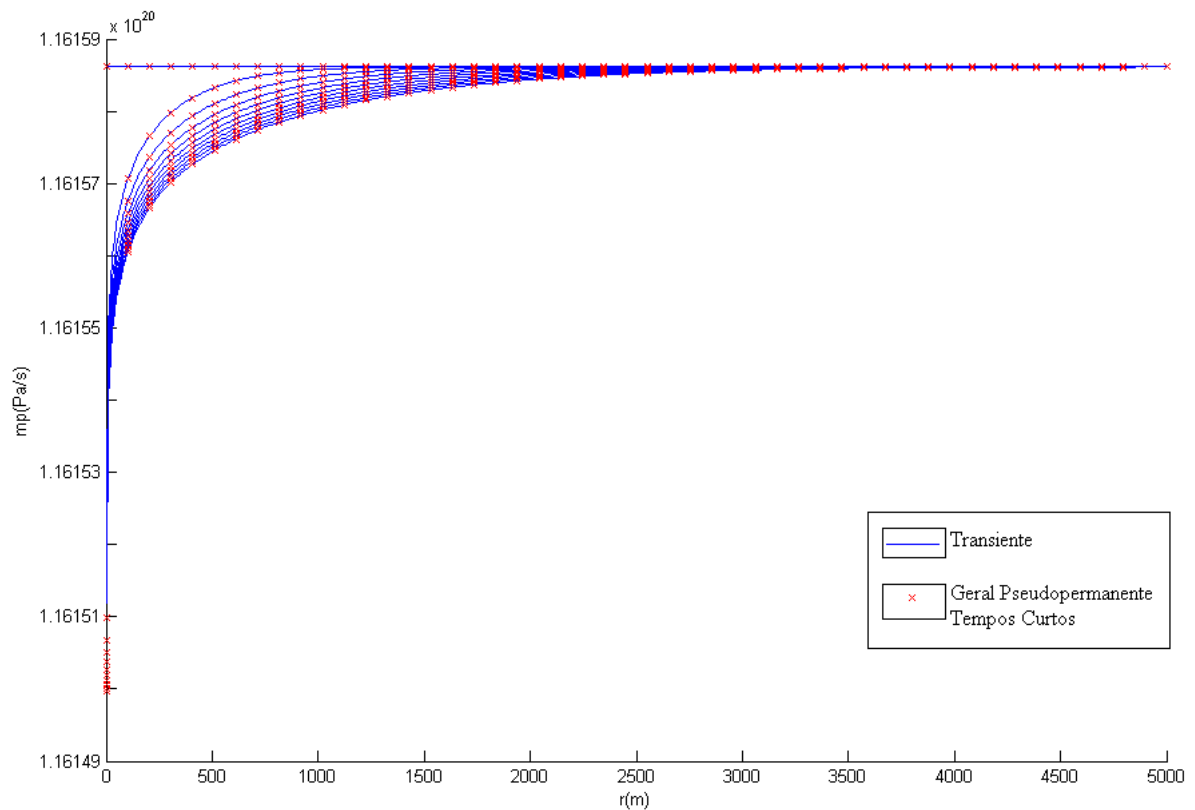


Figura 16: Solução Reservatório Selado Radial - Tempos Curtos

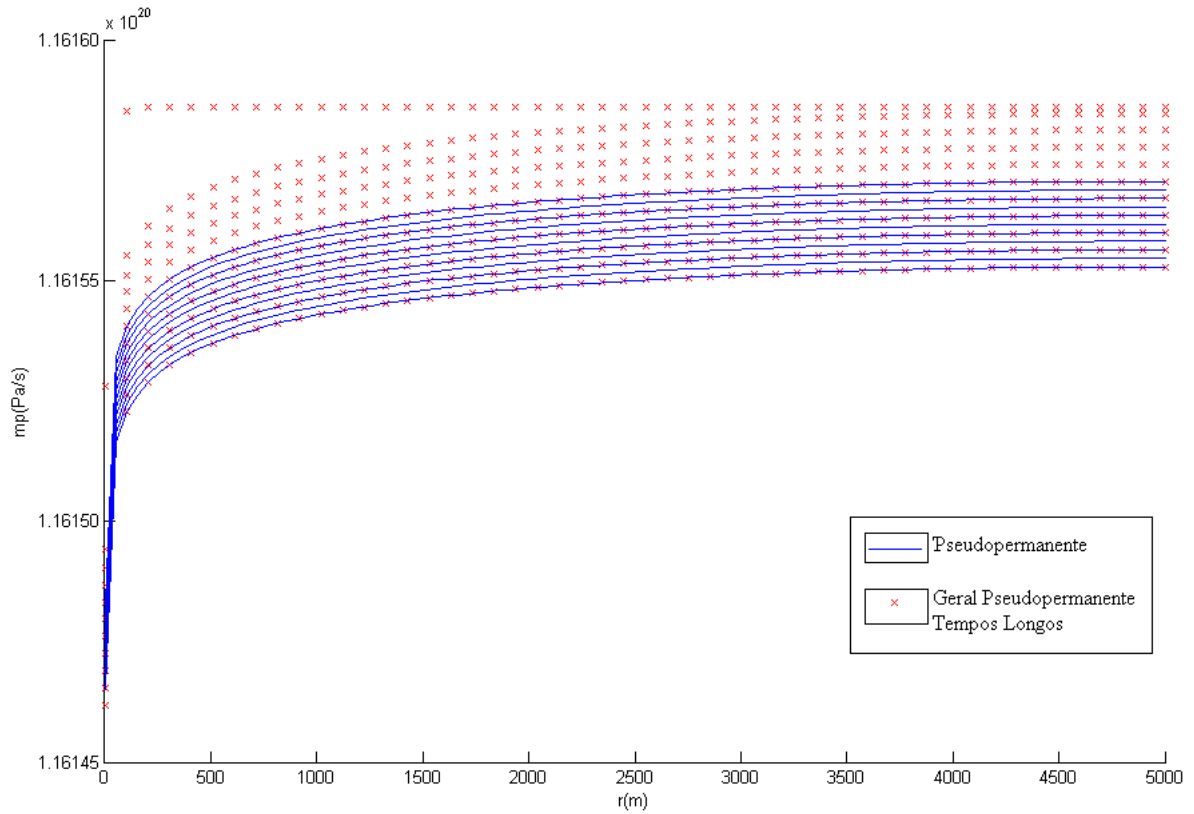


Figura 17: Solução Reservatório Selado Radial - Tempos Longos

Assim, segundo os resultados apresentados neste capítulo, as soluções para reservatórios com alimentação externa e reservatórios selados, válidas em todo o tempo de produção, mostram boa concordância quando comparadas as soluções aproximadas de cada regime.

4 *Considerações Finais*

Neste trabalho foi resolvida a EDH em função da pseudopressão, para fluxo radial e linear, em diversas condições de contorno externas. Também foram desenvolvidas as soluções aproximadas, válidas apenas para tempos iniciais ou para longos períodos de tempo. Paralelo ao desenvolvimento das soluções da EDH para gases, foi construído um algoritmo que tem como resultado os perfis de pseudopressão no reservatório. Como a pseudopressão possui apenas sentido matemático, é calculada a pseudopressão em diversas faixas de pressão, utilizando diversas correlações de viscosidade e fator de desvio do gás real, a fim de obter os perfis de pressão ao longo do tempo.

As soluções em tempos iniciais, tanto para reservatório selado nas fronteiras, quanto para reservatório com alimentação externa, foram comparadas ao regime transiente, e em todos os casos mostraram boa concordância. O mesmo ocorreu quando foram comparadas as soluções em tempos longos às soluções aproximadas do regime permanente e pseudopermanente, em fluxo radial e linear. Pode-se observar também, que os períodos onde as soluções não se sobrepõem indicam as transições entre o regime infinito e aquele no qual as fronteiras do reservatório já exercem influência no comportamento da pressão.

Para trabalhos futuros sugerimos a comparação das soluções analíticas desenvolvidas neste estudo, a soluções numéricas geradas por simuladores comerciais, em diversos valores de vazão e permeabilidade, a fim de avaliar os efeitos da não linearidade ainda presente na EDH da difusividade hidráulica em função da pseudopressão.

Referências

AL-HUSSAINY, R.; Ramey Jr., H. J.; CRAWFORD, P. B. The flow of real gases through porous media. *Journal of Petroleum Technology*, v. 18, n. 5, p. 624–636, 1966.

Barreto Jr., A. B. *Solução da equação da difusividade hidráulica não-linear do gás através de funções de green*. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo, Macaé, Janeiro 2011.

BEGGS, D.; BRILL, J. A study of two-phase flow in inclined pipes. *Journal of Petroleum technology*, v. 25, n. 5, p. 607–617, 1973.

CARR, N.; KOBAYASHI, R.; BURROWS, D. Viscosity of hydrocarbon gases under pressure. *Trans. AIME*, v. 201.

CARSLAW, H.; JAEGER, J. *Conduction of heat in solids*. New York: Oxford University Press, 1959. 505 p.

CARTER, R. D.; TRACY, G. W. An improved method for calculating water influx. *Trans., AIME*, v. 219, p. 415–417, 1960.

CARTER, S. C. M. R. D.; RILEY, H. G. Determination of stabilized gas well performance from short flow tests. *Journal of Petroleum Technology*, v. 15, n. 6, p. 651–658, June. 1963. SPE Paper 400.

DRANCHUK, K. A. P.; FLOCK, D. Prediction of gas well behavior by the application of unsteady state flow theory to pressure drawdown test data. *SPE Journal*, v. 4, n. 3, December 1966. SPE Paper 775.

DRANCHUK, P.; ABOU-KASSEM, J. Calculations of z-factors for natural gases using equations of state. *JCPT*, v. 14, n. 3, p. 34–36, 1975.

EVERDINGEN, A. F. V.; HURST, W. The application of de laplace transformation to flow problems in reservoirs. *Trans. AIME*, v. 186, p. 305–324, 1949.

FETKOVICH, M. J. A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems. *Journal of Petroleum Technology*, v. 23, n. 7, p. 814–828, July 1971.

HALL, K.; YARBOROUGH, L. A new equation of state for z-factors calculations. *Oil Gas and journal*, p. 82–92, 1973.

JONES, L. An approximate method for computing nonsteady-state flow of gases in porous media. *Old SPE Journal*, v. 1, n. 4, p. 264–276, Dec. 1961.

JOSSI, J.; STIEL, L.; THODOS, G. The viscosity of pure substances in the dense gaseous and liquid phases. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 59–63, 1962.

LEE, A.; GONZALES, M.; EAKIN, B. The viscosity of natural gases. *Journal of Petroleum Technology*, v. 18, n. 8, p. 997–1000, 1966.

LEUNG, W. F. A fast convolution method for implementing single-porosity finite/infinite aquifer models for water-influx calculations. *SPE Reservoir Engineering*, v. 1, n. 5, p. 490–510, Sept. 1986.

LONDONO, F.; ARCHER, R.; BLASINGAME. Simplified correlations for hydrocarbon gas viscosity and gas density - validation and correlation of behavior using a large-scale database. *SPE Gas Technology Symposium*, 2002. SPE 75721.

MIRELES, T.; BLASINGAMEL, T. A. Application of convolution theory for solving non-linear flow problems: Gas flow systems. In: . Denver, Colorado: Proceedings of SPE 54th Annual Technical Conference and Exhibition, 2003. SPE Paper 84073.

NISHIUMI, H.; SAITO, S. An improved generalized bwr equation of state applicable to low reduced temperatures. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, v. 8, n. 5, p. 356–360, 1975.

PERES, A.; SERRA, K.; REYNOLDS, A. Toward a unified theory of well testing for nonlinear-radial-flow problems with application to interference tests. *SPE formation evaluation*, v. 5, n. 2, p. 151–160, June 1990.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006. 832 p.

ROWAN, G.; CLEGG, M. An approximate method for non-darcy radial gas flow. *Old SPE Journal*, v. 4, n. 2, p. 96–114, June. 1964.

STEHFEST, H. Algorithm 386, numerical inversion of laplace transforms - d5. *Communications of the ACM*, v. 13, n. 1, p. 47–49, Jan 1970.