

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LINHAS DE FLUXO PARA  
DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO VERTICAL DE PERMEABILIDADE A  
PARTIR DO HISTÓRICO DE PRODUÇÃO**

**MARCOS NOGUEIRA FERREIRA**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE - UENF  
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO - LENEP

MACAÉ / RJ  
MAIO DE 2004

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LINHAS DE FLUXO PARA  
DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO VERTICAL DE PERMEABILIDADE A  
PARTIR DO HISTÓRICO DE PRODUÇÃO**

**MARCOS NOGUEIRA FERREIRA**

Tese apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade  
Estadual do Norte Fluminense, como  
parte das exigências para obtenção  
do título de Mestre em Engenharia de  
Reservatório e de Exploração de  
Petróleo.

Orientador: Pavel Bedrikovetsky, Ph.D

MACAÉ - RJ  
MAIO DE 2004

# **APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LINHAS DE FLUXO PARA DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO VERTICAL DE PERMEABILIDADE A PARTIR DO HISTÓRICO DE PRODUÇÃO**

**MARCOS NOGUEIRA FERREIRA**

Tese apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Reservatório e de Exploração de Petróleo.

Aprovada em 04 de maio de 2004.

Comissão Examinadora:

---

Prof. André Duarte Bueno, Dr. - LENEP/CCT/UENF

---

Dr. Marcelo Curzio Salomão, Dr. - UN-BC/PETROBRAS

---

Prof. Antonio Abel Gonzáles Carrasquilla, Dr. - LENEP/CCT/UENF

---

Prof. Pavel Bedrikovetsky (Orientador), Ph.D. - LENEP/CCT/UENF

## Dedicatória

---

A minha esposa Adriana e ao meu filho Ricardo, pelo inestimável apoio e compreensão em muitos momentos.

Aos meus pais Agripino e Letícia, pela confiança sempre depositada em mim.

## Agradecimentos

---

A Deus, pela chama da vida que se renova a cada dia.

Aos meus familiares e amigos, pela minha pequena disponibilidade nos momentos de estudo.

Ao engenheiro Fabio de Souza Corrêa, pelas rotineiras discussões e apoio inestimável com o desenvolvimento do programa numérico.

Aos colegas de mestrado, Antônio César de Araújo Gomes, José Sérgio Daher, José B Menezes Leite Netto, Márcia Ida de Oliveira Silva, Jeferson Mello Boim e Edson Kenji Iamashita, companheiros desta caminhada.

Ao engenheiro Alexandre Valladares Quintino dos Santos, da PETROBRAS, por disponibilizar os dados reais utilizados.

Ao engenheiro José Eurico Altoé Filho, pelas discussões técnicas.

Aos membros da banca examinadora, pela gentileza em aceitar esta incumbência.

Ao professor Pavel Bedrikovetsky, pela insistência para que este trabalho ocorresse.

Aos professores, colegas e funcionários do LENEP, pela enriquecedora convivência, tanto no campo intelectual quanto pessoal.

À LENEP/UENF, pela acolhida sempre fraterna.

À PETROBRAS, esta grande Empresa.

Uma maior recuperação dos hidrocarbonetos contidos no reservatório é o objetivo maior das companhias petrolíferas. Para aumentar o fator de recuperação, a técnica mais largamente usada é a injeção de água para deslocar o óleo. Linhas de fluxo desenvolvem-se, então, entre poços injetores e produtores e dependem da distribuição espacial dos poços. A heterogeneidade do reservatório é fator fundamental para explicar o caminho percorrido pelos fluidos. O fluxo de fluidos em meio poroso é, também, regido pelas características da rocha e dos fluidos e pela interação entre a rocha e os fluidos.

Procura-se, neste trabalho, obter um método analítico que permita calcular a distribuição vertical de permeabilidades a partir de dados comumente medidos durante a exploração do campo, como a fração de água produzida no poço produtor. A solução numérica deste problema é largamente difundida. Entretanto, neste trabalho, desenvolve-se uma solução analítica, apresentando as equações que regem o comportamento do fluxo, respeitadas algumas condições.

Este é um problema inverso, entre tantos outros presentes na Engenharia de Reservatórios, e, para sua solução, foi utilizado um método de linhas de fluxo. Desta forma, um problema tridimensional pode ser resolvido conhecendo-se a solução unidimensional de Buckley e Leverett.

Increasing reserves is one of the most important objectives of an oil company. It may be achieved through the discovery of new fields or the raising of the recovery factor of producing units. To increase the recovery factor, the most used technique is the injection of water to displace the oil. The streamlines that arise in this process depend mainly on the spatial distribution of producing and injector wells. The heterogeneity of the reservoir is a fundamental factor to understand the path of the fluids in porous media. The flow of fluids in porous media is, also, governed by the characteristics of the rock and of the fluids and by the interaction between them.

In this work, an analytical method that allows calculating the vertical distribution of permeabilities is obtained. It is based on measured production data, like the water cut of producing wells. The numerical solution of this problem is well known. However, in this work, one develops an analytical solution, presenting the equations that govern the behavior of the flow, respected some conditions.

In order to solve this inverse problem, a streamline method is applied. Thus, a three-dimensional problem can be solved once the one-dimensional solution of Buckley and Leverett equation is known.

## Índice

---

Capítulo	Descrição	Página
	Resumo	V
	Abstract	VI
	Lista de Figuras	IX
	Lista de Tabelas	XI
	Nomenclatura	XII
1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	6
3	Metodologia	12
4	O modelo de linhas de fluxo	14
	4.1 Função de fluxo ( $y$ ) e função potencial de velocidade ( $j$ )	14
	4.2 Fluxo bifásico e bidimensional	20
	4.3 Simplificação do modelo para caso de mobilidade total constante	28
5	Problema inverso	29
	5.1 Dedução da equação integral	29
	5.2 Simplificação do modelo para caso de mobilidade total constante	31
	5.3 Caracterização dos regimes de deslocamento de óleo pela água	32
	5.4 Determinação das pseudofunções	33
	5.5 Determinação da distribuição vertical das permeabilidades	35
6	Aplicação a dados de campo	36
7	Conclusões	41
	7.1 Sugestões	42
8	Bibliografia	43
Apêndice A	A equação do fluxo fracionário	47
Apêndice B	Solução de Buckley e Leverett para modelo 1-D	51





## Lista de Figuras

---

Número	Descrição	Página
1	Linhas de fluxo e equipotenciais para o fluxo de uma única fase em um quadrante de 5-spot. A área hachurada corresponde a um canal de fluxo.	6
2	Definição de linha de fluxo	15
3	A relação entre a função de fluxo e a vazão	18
4	Ortogonalidade entre linhas de fluxo e equipotenciais	19
5	Definição de $\mathbf{j}_D$ e $\mathbf{y}_D$	27
6	Posição da frente de avanço de água, quando a permeabilidade é crescente com a profundidade	33
7	Distribuição dos poços no reservatório estudado	37
8	Caso real : BSW relatado e BSW adotado	39
9	BSW calculado após o ajuste do parâmetro a	40
10	Distribuição vertical de permeabilidade	40
A-1	(a) Pressão capilar (b) Distribuição de saturação de água em função da distância	49
A-2	Curvas típicas de permeabilidades relativas à água e ao óleo	50
A-3	Curva típica de fluxo fracionário de água em função da saturação de água	50
B-1	Distribuições de saturação de água durante diferentes estágios de um deslocamento de óleo pela água	51
B-2	(a) Derivada de uma típica curva de fluxo fracionário (b) Distribuição de saturação de água resultante em deslocamento de óleo pela água	55
B-3	Ondas de choque	58

B-4	Perfil de saturação de água computada a partir da solução auto-similar da equação de Buckley e Leverett	60
B-5	Perfil de saturação de água, para cada $T^*$ , computada a partir da solução pelo método das características da equação de Buckley e Leverett	60
B-6	Perfil de saturação de água computada a partir da solução da equação de Buckley e Leverett	61
C-1	Distribuição da saturação de água em função da distância, antes da irrupção de água no poço produtor	62
C-2	Determinação de $S_{wf}$ e $\bar{S}_w$	64
C-3	Obtenção da saturação $S_w$ correspondente a cada $f_w(1, T)$ conhecido	65
C-4	Obtenção da saturação média de água entre $X = 0$ e $X = 1$ correspondente a cada $T$	66

## Lista de Tabelas

---

Número	Descrição	Página
1	Características do reservatório estudado (dados completos para o modelo com mobilidade total variável)	37

## Nomenclatura

---

### Letras Latinas

Símbolos	Descrições	Unidades
$a$	expoente na função analítica para a permeabilidade relativa à água	
$A$	área transversal ao fluxo	$m^2$
$BSW$	fração de água no poço produtor	
$d\vec{A}$	vetor no sentido do fluxo e normal a um elemento de área de largura unitária (na direção $z$ ) e comprimento $ds$	$m^2$
$d\vec{l}$	deslocamento elementar normal à superfície equipotencial	$m$
$d\vec{r}$	deslocamento infinitesimal ao longo da linha de fluxo	$m$
$ds$	comprimento elementar de um arco conectando dois pontos localizados em linhas de fluxo distintas	$m$
$D$	velocidade adimensional de deslocamento da onda de choque	
$f_o$	fluxo fracionário de óleo	
$f_w$	fluxo fracionário de água	
$f_w^-$	fluxo fracionário de água atrás da onda de choque	
$f_w^+$	fluxo fracionário de água a frente da onda de choque	
$f_w^*$	fluxo fracionário de água no poço produtor correspondente a $S_w^*$	
$f_w'$	primeira derivada de $f_w$ em relação a $S_w$	
$f_w''$	segunda derivada de $f_w$ em relação a $S_w$	
$\tilde{F}_w$	pseudofluxo fracionário de água	
$g$	aceleração devida à gravidade	$m/s^2$
$h$	espessura do reservatório	$m$
$H(\mathbf{y}, t)$	variável adimensional	
$\vec{i}$	vetor unitário na direção $x$	
$\vec{j}$	vetor unitário na direção $y$	

$J$	quadrado do módulo do vetor velocidade	$m^2/s^2$
$J_D$	quadrado do módulo do vetor velocidade adimensional	
$k$	permeabilidade absoluta	$m^2$
$k_o$	permeabilidade efetiva ao óleo	
$k_w$	permeabilidade efetiva à água	
$k_{ro}$	permeabilidade relativa ao óleo	
$k_{rw}$	permeabilidade relativa à água	
$k_{rowi}$	permeabilidade relativa ao óleo na $S_{wi}$	
$k_{rowr}$	permeabilidade relativa à água na $S_{or}$	
$k_h$	permeabilidade absoluta horizontal (direções x e y)	$m^2$
$k_v$	permeabilidade absoluta vertical (direção z)	$m^2$
$\bar{k}$	permeabilidade absoluta média em uma seção vertical	$m^2$
$\bar{k}$	vetor unitário na direção z	
$K$	permeabilidade adimensional	
$\tilde{K}_o$	pseudopermeabilidade efetiva ao óleo adimensional	
$\tilde{K}_w$	pseudopermeabilidade efetiva à água adimensional	
$L$	distância entre os pontos de injeção e de produção	m
$M$	razão entre as mobilidades do óleo e da água	
$p$	pressão considerando fluxo monofásico	Pa
$p_{inj}$	pressão no poço injetor considerando fluxo monofásico	Pa
$p_{prod}$	pressão no poço produtor considerando fluxo monofásico	Pa
$P$	pressão considerando fluxo bifásico	Pa
$P_c$	pressão capilar	Pa
$P_{inj}$	pressão no poço injetor considerando fluxo bifásico	Pa
$P_o$	pressão na fase óleo, considerando fluxo bifásico	Pa
$P_{prod}$	pressão no poço produtor considerando fluxo bifásico	Pa
$P_w$	pressão na fase água, considerando fluxo bifásico	Pa
$q$	vazão no fluxo monofásico por unidade de espessura do reservatório	$(m^3/s)/m$
$q_o$	vazão de óleo em um fluxo bifásico	$m^3/s$
$q_t$	vazão total em um fluxo bifásico	$m^3/s$
$q_w$	vazão de água em um fluxo bifásico	$m^3/s$
$Q$	vazão total por unidade de espessura do reservatório	$(m^3/s)/m$

$S$	saturação de água normalizada	
$S_o$	saturação de óleo	
$S_{or}$	saturação de óleo residual	
$S_w$	saturação de água	
$S_{wf}$	saturação de água na frente de avanço	
$S_{wi}$	saturação de água irreduzível	
$\bar{S}_w$	saturação de água média atrás da frente de avanço	
$\bar{\bar{S}}_w$	saturação de água média em uma seção vertical	
$S_w^-$	saturação de água atrás da onda de choque	
$S_w^+$	saturação de água a frente da onda de choque	
$S_w^*$	saturação de água no poço produtor com $T^*$	
$t$	tempo	s
$T$	número de volumes porosos injetados	
$T^*$	número de volumes porosos injetados até um certo tempo	
$\bar{u}$	velocidade de fluxo do fluido monofásico	m/s
$\bar{U}$	velocidade total do fluido no fluxo bifásico	m/s
$ u $	módulo do vetor velocidade	m/s
$\bar{u}_o$	velocidade do óleo no fluxo bifásico	m/s
$\bar{u}_w$	velocidade da água no fluxo bifásico	m/s
$W_i$	volume de água injetado em um tempo $t$	m <sup>3</sup>
$x, y, z$	coordenadas em um sistema cartesiano	m
$x_1$	posição de um plano com saturação $1-S_{or}$	m
$x_2$	posição de um plano com saturação $S_{wf}$	m
$x_{S_w}$	posição de um plano com saturação $S_w$	m
$X$	distância adimensional	
$Z$	espessura adimensional	

## Letras Gregas

Símbolos	Descrições	Unidades
$\Delta P$	diferencial de pressão entre o poço injetor e produtor	Pa
$e$	variável adimensional (= $X / T$ )	
$e_1$	razão entre as forças capilares e viscosas	
$e_2$	razão considerando a anisotropia	
$e_3$	razão entre as forças gravitacionais e capilares	
$f$	porosidade	$m^3 / m^3$
$\Phi$	potencial do fluido por unidade de massa	Pa.m/kg
$\Phi_o$	potencial do óleo por unidade de massa	Pa.m/kg
$\Phi_w$	potencial da água por unidade de massa	Pa.m/kg
$h(j, y, t)$	variável adimensional (= $x / t$ )	
$j$	potencial de velocidade	$m^2/s$
$j_D$	potencial de velocidade adimensional	
$j_{inj}$	potencial de velocidade no poço injetor	$m^2/s$
$j_{prod}$	potencial de velocidade no poço produtor	$m^2/s$
$l$	mobilidade total em função da saturação de água	$(Pa.s)^{-1}$
$m$	viscosidade do fluido	Pa.s
$m_b$	viscosidade do óleo	Pa.s
$m_w$	viscosidade da água	Pa.s
$q$	ângulo entre a direção do fluxo e o plano horizontal	
$\Theta$	ângulo de contato	
$r_o$	massa específica do óleo	$kg/m^3$
$r_w$	massa específica da água	$kg/m^3$
$s$	tensão interfacial entre o óleo e a água	N/m
$t(y, t)$	variável definida	s
$x(j, y)$	variável definida	s
$x_{prod}(y)$	variável $x$ tomada no poço produtor	s
$y$	função de fluxo do fluxo bidimensional	$m^2/s$
$y_D$	função de fluxo adimensional	



## 1. Introdução

Um dos grandes objetivos das companhias petrolíferas é manter ou aumentar as suas reservas de hidrocarbonetos. Isto se dá com a descoberta de novas jazidas e com a exploração adequada dos reservatórios já descobertos.

À engenharia cabe, tipicamente o projeto e o controle de processos, o projeto de equipamentos e a seleção de procedimentos de operação. As soluções efetivas requerem algum conhecimento de como as propriedades controláveis do processo, afetarão o estado do sistema. A base de tal conhecimento são modelos matemáticos para os processos. Tais modelos suportam as decisões de engenharia relativas ao projeto e ao controle dos processos. A seleção dos modelos matemáticos, bem como das propriedades dentro dos modelos, é conhecida como problema de identificação ou inverso. Estes problemas são encontrados em toda a ciência e na engenharia.

Na Engenharia de Reservatórios, a caracterização do meio poroso e das propriedades petrofísicas é largamente limitada pela habilidade em propor e resolver problemas inversos. As caracterizações das propriedades e dos processos no meio poroso são tipicamente deduzidas da injeção/produção de fluidos ou outras observações em ensaios laboratoriais. Adicionalmente, desenvolvem-se métodos para caracterizar o reservatório através de dados obtidos durante sua exploração.

Vários itens são necessários para se obter bons modelos e resultados confiáveis. Antes de tudo, os dados têm de ser de boa qualidade com respeito a seus valores absolutos e à frequência de amostragem. O tratamento dos dados é necessário para suavizá-los e filtrá-los, mas tendo-se o cuidado de não alterá-los ou distorcê-los. Na validação e interpretação dos modelos, os dados brutos têm de ser usados mesmo que apresentem muito ruído.

Os modelos matemáticos usados para descrever o fluxo de fluidos no meio poroso estão tipicamente baseados em representações contínuas nas quais as variáveis de estado são definidas com relação a elementos de volume representativos ou médias volumétricas locais. As propriedades que são usadas nestes modelos são propriedades macroscópicas. Estas incluem a porosidade e a permeabilidade absoluta, que podem variar espacialmente, bem como a permeabilidade relativa e a pressão capilar, que dependem da saturação de cada fase.

A modelagem matemática de reservatórios de petróleo e de aquíferos é prática rotineira para tomar decisões concernentes ao gerenciamento destes recursos de subsuperfície. Uma das etapas mais críticas é a seleção das propriedades do reservatório que serão usadas em simuladores matemáticos. Este é um problema desafiador devido ao fato de que as propriedades variam espacialmente e os dados estão disponíveis em poucas localidades. Uma fonte importante de informação para caracterizar o reservatório são a pressão e os dados de vazão de fluxo coletados nos poços durante ou a exploração do reservatório ou os testes de avaliação dos poços. Métodos mais elaborados para a estimativa de parâmetros a partir de tais dados podem melhorar a confiabilidade das previsões do comportamento do reservatório.

Os reservatórios, cujos mecanismos de produção são pouco eficientes e que, por conseqüência, retêm grandes quantidades de hidrocarbonetos após a exaustão da sua energia natural, são fortes candidatos ao emprego de uma série de processos que visam à obtenção de uma recuperação adicional.

A recuperação avançada de petróleo refere-se a qualquer método usado para recuperar mais óleo de um reservatório além daquele produzido por uma recuperação primária a fim de se alcançar um maior fator de recuperação. Na produção primária, óleo é deslocado para o poço produtor pela energia natural do reservatório. Fontes de energia natural do reservatório são a expansão dos fluidos nele contidos e da rocha, a contração do volume poroso, a liberação de gás em solução no óleo, a segregação gravitacional, o influxo de água a partir de aquíferos e a expansão da capa de gás.

Muitos processos de recuperação avançada vêm sendo desenvolvidos através dos anos num esforço para recuperar os enormes volumes de óleo deixados para trás devido a mecanismos de recuperação primária ineficientes.

A maior parte dos processos de recuperação avançada de petróleo envolve a injeção de um fluido (gás ou líquido) no reservatório. A injeção de água é o processo mais utilizado no mundo hoje e é responsável por uma parcela significativa do óleo produzido.

O fluido injetado, que também recebe o nome de fluido deslocante, deve empurrar o óleo, chamado de fluido deslocado, para fora dos poros da rocha e ao mesmo tempo ir ocupando o espaço deixado à medida que este vai sendo expulso. Este é um processo dinâmico.

Tanto a eficiência volumétrica, definida como a razão entre o volume de óleo contatado pelo fluido deslocante e o volume de óleo originalmente presente no reservatório, quanto a eficiência de deslocamento, definida como a razão entre o volume de óleo deslocado e o volume de óleo contatado pelo fluido deslocante, e, conseqüentemente, o fator de recuperação de óleo, obtido com a multiplicação de ambas eficiências, dependem das propriedades petrofísicas da rocha (permeabilidade, porosidade), das propriedades dos fluidos presentes (viscosidade), da interação entre os fluidos e a rocha (pressão capilar, permeabilidade relativa, molhabilidade, potencial de precipitação de compostos químicos), da heterogeneidade do reservatório (falha, barreira de transmissibilidade, distribuição areal e vertical das permeabilidades), da localização dos poços injetores e produtores, das vazões de produção e de injeção envolvidas.

Existe uma grande diversidade na maneira de se executar a injeção de um fluido. A opção por um dos diversos sistemas deve ser pautada pelos aspectos de sua viabilidade técnica e econômica. Cada projeto de injeção é exclusivo para cada reservatório.

O deslocamento de um fluido por outro no reservatório ocorre com a injeção do fluido deslocante em vários poços injetores (fontes) e a produção por meio de um número de poços produtores (sumidouros).

Como esquemas de injeção, pode-se ter a injeção de água na base ou de gás no topo, se o reservatório tiver uma certa inclinação, e a injeção em malhas, onde os poços de injeção e de produção estão uniformemente distribuídos por todo o reservatório, ocorrendo a repetição de um determinado padrão ou arranjo dos poços de injeção e de produção. Vários padrões foram analisados em trabalhos clássicos (por exemplo, Muskat - 1937). Em outros reservatórios, o deslocamento do óleo pode se dar a partir de poços injetores localizados no centro ou próximo às fronteiras do campo.

O movimento dos fluidos é controlado pelo arranjo dos poços produtores e injetores bem como pelas heterogeneidades do reservatório. As heterogeneidades do reservatório (particularmente na direção vertical) e a segregação gravitacional fazem o fluxo variar nas três dimensões. Se o reservatório é homogêneo e isotrópico, a frente de avanço pode ser vertical de forma que o processo de deslocamento ocorre basicamente em duas dimensões.

Os métodos de predição do comportamento de deslocamento do óleo pela água em sistemas lineares e areais consideram que o processo de deslocamento é uniforme na seção transversal vertical. Assim, não há mudança de saturação com a posição vertical. Sabe-se que o deslocamento pode não se dar uniformemente nos reservatórios por várias razões. A principal razão é que os reservatórios de petróleo não são usualmente homogêneos e isotrópicos. Processos geológicos levam a variações de permeabilidades e porosidades horizontal e vertical. As maiores mudanças ocorrem nas permeabilidades que podem variar de uma ordem de grandeza ou mais verticalmente ao longo da espessura de um reservatório. Essas diferenças nas propriedades da rocha acarretam uma variação nas vazões de fluido verticalmente. Mesmo em reservatórios homogêneos, as forças gravitacionais e capilares podem induzir fluxos verticais de óleo e de água, o que influencia a eficiência de deslocamento. Em muitas situações de campo, a segregação gravitacional e a heterogeneidade vertical são importantes parâmetros para a recuperação com injeção de água.

Para prever o comportamento do fluxo de fluidos em meio poroso, foram desenvolvidos modelos teóricos, analíticos e numéricos. Alguns destes modelos assentam-se no conhecimento da teoria do fluxo fracionário.

Para uma rocha e uma fase de fluido específica, saturações mínimas são requeridas para a fase molhante e a fase não-molhante fluírem em um sistema bifásico sob um gradiente de pressão aplicado.

As permeabilidades relativas correspondentes a duas (ou mais) fases fluindo através de uma rocha porosa podem ser computadas a partir de dados experimentais, assumindo-se que a lei de Darcy aplica-se a cada fase. Quando isto é feito em sistemas bifásicos, a permeabilidade relativa a uma fase varia com a saturação, indo de zero, quando a fase é imóvel, a um máximo, quando a segunda fase é imóvel.

O fluxo de fluidos através do meio poroso é descrito pela equação da continuidade, que é a equação diferencial parcial que descreve a lei de conservação de massa em todo o ponto do meio poroso.

A equação da continuidade, embora conceitualmente correta, é expressa em velocidades que não podem ser medidas. Para permitir o seu uso em trabalhos de engenharia, aplica-se a lei de Darcy para cada fase.

O deslocamento de um fluido por um outro fluido é um processo não-permanente porque as saturações dos fluidos mudam com o tempo. Isto causa mudanças nas permeabilidades relativas e mesmo na pressão e nas velocidades das fases.

Um método para prever a evolução do deslocamento de óleo é o modelo de Buckley e Leverett, ou do avanço frontal. O modelo de Buckley e Leverett foi desenvolvido com a aplicação da lei de conservação de massa ao fluxo de dois fluidos (óleo e água) em uma direção.

O fluxo fracionário de água,  $f_w$ , é definido como a fração volumétrica de água no fluxo total que está fluindo em cada posição em um dado instante  $t$ .

A equação de Buckley e Leverett mostra que, em um processo de deslocamento linear unidimensional, cada saturação de água move-se através da rocha porosa com uma velocidade constante, que pode ser calculada a partir da derivada do fluxo fracionário de água em relação à saturação de água. Três hipóteses simplificadoras foram feitas para deduzi-la : (1) os fluidos são incompressíveis, (2) o fluxo fracionário de água é uma função apenas da saturação de água e (3) não há nenhuma transferência de massa entre as fases.

A análise unidimensional do deslocamento de fluidos em reservatórios por um fluido injetado é uma das principais ferramentas teóricas para os estudos dos processos de recuperação de petróleo.

Um dos modelos de previsão do comportamento do fluxo de fluidos em meio poroso é aquele que considera as linhas de fluxo que se desenvolvem entre os poços injetores e produtores. Com isso, pode-se analisar um problema tridimensional a partir do conhecimento da solução de um problema unidimensional (Buckley e Leverett).

## 2. Revisão Bibliográfica

Todos os fluidos seguem trajetórias chamadas de linhas de fluxo e isto também é verdadeiro para o fluxo de fluidos em meio poroso. As linhas de fluxo podem variar com o tempo, mas, em qualquer instante, são curvas contínuas. Todo o fluxo de fluido se dá pelas linhas de fluxo. A região limitada por duas linhas de fluxo é um canal de fluxo. O deslocamento ao longo de qualquer linha de fluxo segue uma solução unidimensional com nenhum fluxo cruzado entre as linhas de fluxo, isto é, não há nenhum fluxo entre uma linha de fluxo e outra. Para o caso de recuperação de óleo através da injeção de água, os fluidos percorrem as linhas de fluxo ao fluírem de um poço injetor para um produtor. Linhas de fluxo para o fluxo permanente de uma única fase (razão de mobilidade unitária) foram determinadas para distribuições regulares de poços, em malha (Figura 1). Linhas de fluxo para arranjos arbitrários de poços produtores e injetores podem ser determinadas por superposição ou solução numérica.

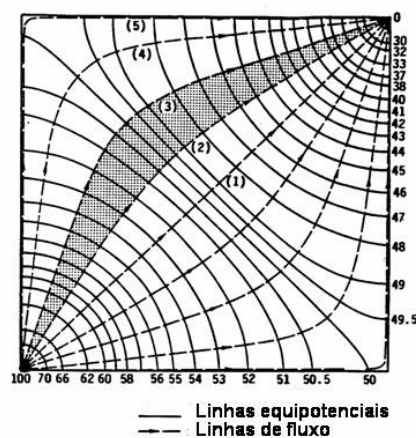


Figura 1 – Linhas de fluxo e equipotenciais para o fluxo de uma única fase em um quadrante de 5-spot.

A área hachurada corresponde a um canal de fluxo.

A teoria do fluxo através de linhas de fluxo em um campo de potencial fixo foi usada para prever o comportamento do varrido devido à injeção de água em uma área com um padrão de injeção em malha. Higgins e Leighton (1962) adaptaram isto na forma de canais de fluxo, os quais são divididos em células de igual volume. Um cálculo de deslocamento, usando a teoria de Buckley e Leverett, é realizado dentro

de cada célula para prever o comportamento do fluxo. As suposições básicas do método de canais de fluxo, introduzido por Higgins e Leighton, são : (1) que as linhas de fluxo são independentes da razão de mobilidade e (2) a teoria de Buckley e Leverett pode ser usada para calcular o deslocamento de fluido nos canais de fluxo. Um modelo ampliado foi apresentado por Doyle e Wurl (1969) para permitir previsões considerando sistemas com múltiplos poços e múltiplas zonas. As linhas de fluxo são geradas matematicamente usando as equações de fluxo em regime permanente.

Os modelos de canais de fluxo assumem que os processos de deslocamento imiscível seguem as mesmas linhas de fluxo determinadas para o fluxo permanente de um fluido homogêneo no meio poroso. A região a ser simulada é dividida em canais de fluxo, baseados nas linhas de fluxo determinadas para o fluxo de um fluido homogêneo. Um modelo de deslocamento linear é usado para simular o deslocamento imiscível dentro do canal de fluxo. O resultado do deslocamento em toda a região é obtido somando-se os resultados dos canais de fluxo nos mesmos instantes (de tempo).

A aplicação do modelo de linhas de fluxo na recuperação secundária foi descrita por Le Blanc e Caudle (1970), quando as linhas de fluxo reais ao invés dos canais de fluxo são usadas para representar o processo de avanço frontal. Qualquer forma de frente de avanço (onda rarefeita, choque ou mista) pode ser incorporada ao modelo. O modelo está baseado na suposição de que a geometria e a posição das linhas de fluxo não mudam com a condição de fluxo e são sempre as mesmas que aquelas obtidas com razão de mobilidade unitária. Portanto, qualquer afastamento da condição assumida pode causar erros quando comparados com os resultados do fluxo real. Para reduzir este erro, um conjunto de fatores de correção é utilizado.

Apesar de existir há cerca de quarenta anos, a simulação de reservatórios usando a técnica de linhas de fluxo foi pouco aplicada devido a diversas limitações intrínsecas. Estas limitações restringiam sua utilização basicamente às aplicações acadêmicas.

A partir dos anos 90, novos recursos computacionais e matemáticos foram incorporados aos modelos, permitindo levar em consideração, entre outros aspectos, a compressibilidade (Ingebrigten et al. – 1999) e os efeitos gravitacionais (Bratvedt et al. – 1996). Tornou-se também possível a atualização das condições de contorno ao

longo do tempo (variações nas vazões dos poços) (Batycky et al. – 1997). Com a eliminação destas restrições, os métodos de linhas de fluxo passaram a ser mais utilizados. Ainda que restem algumas restrições, a utilização da técnica como ferramenta complementar se apresenta com um enorme potencial. Thiele (2001) apresentou um resumo sobre esta técnica e seus mais recentes aperfeiçoamentos.

A técnica de linhas de fluxo é muito útil e aplicável para a otimização da injeção de água. É agora aplicável em muitos casos de campo porque inclui efeitos gravitacionais e permite variações na vazão do poço (abertura/fechamento de poços). Isto permite avaliar o varrido vertical e areal.

A modelagem de canais de fluxo e de linhas de fluxo, em larga extensão, tem avançado pela constatação de que a heterogeneidade controla o fator de recuperação em muitos campos. Esta constatação levou a dedução de modelos geológicos mais complexos, mas, desafortunadamente, também salientou o fosso entre o detalhe geológico e a capacidade de simulação.

As linhas de fluxo são por si só uma representação mais familiar aos engenheiros, já que agregam o caráter dinâmico do fluxo dos fluidos no reservatório ao representar a morfologia do escoamento. Os engenheiros concebem os modelos de reservatórios com fins de desenvolvimento, previsão de produção, gerenciamento de reservatórios, quantificação de reservas, etc. Para isso, geram gráficos de comportamento e mapas de saturação ou pressão ao longo do tempo. Em geral, estas interfaces não permitem uma compreensão mais detalhada dos caminhos seguidos pelos fluidos no reservatório.

A identificação dos caminhos preferenciais, proporcionada pela técnica de linhas de fluxo, leva a um melhor entendimento da influência de alguns poços sobre os demais e da transmissibilidade no reservatório, permitindo ajustes no lançamento de malhas de drenagem ou na distribuição das cotas de injeção.

Além da melhor visualização do comportamento dinâmico dos fluidos no reservatório, outros recursos fazem deste método uma ferramenta de grande utilidade para o engenheiro de reservatório. Na medida em que as linhas de fluxo partem de ou chegam nos poços, é possível distinguir a região do reservatório que está associada a cada poço. Assim, é possível quantificar o volume drenado por cada poço produtor ou, alternativamente, o volume sob influência de cada poço injetor. Este volume é bastante útil para diversas análises. Em especial pode-se citar o posicionamento dos poços, balanceio das cotas de injeção e de produção dos



poços e classificação de reservas. Também é possível avaliar os valores médios dentro de cada região como, por exemplo, permeabilidade, pressão, saturação de óleo, etc. Outro recurso do método de linhas de fluxo é a quantificação do percentual da vazão de cada poço injetor associada a cada produtor ou, inversamente, o percentual da vazão de cada poço produtor devido a cada poço injetor.

O deslocamento do óleo pela água é simulado resolvendo a equação de avanço frontal (Buckley e Leverett) nas coordenadas da linha de fluxo. A evolução do deslocamento é computada como se a linha de fluxo fosse linear. Assim, o problema do fluxo é decomposto em um conjunto de simulações de fluxo unidimensional ligadas por condições de contorno comuns (por exemplo, mesmo diferencial de pressão ao longo de todas as linhas de fluxo ligando um injetor a um produtor). Uma linha de fluxo tem de começar em uma fonte e terminar em um sumidouro para manter a continuidade. Em uma abordagem baseada em linhas de fluxo, as equações da pressão são solucionadas independentemente das equações de saturação. O desacoplamento das equações de pressão das de saturação acelera a simulação significativamente por reduzir o número de tempos que o campo de pressão tem de ser atualizado e reduz grandemente o número de equações a resolver.

Para razão de mobilidade unitária e condições de contorno constantes, a distribuição das linhas de fluxo permanece inalterada do começo ao fim do processo de deslocamento e entre duas linhas de fluxo a vazão de fluxo é constante. Portanto, o campo de pressão ou a distribuição das linhas de fluxo necessita ser determinado apenas uma vez e as soluções da saturação podem ser mapeadas ao longo das linhas de fluxo.

Para razões de mobilidade não unitárias, existem duas abordagens comuns para tratar as linhas de fluxo: uma é fixar a geometria das linhas de fluxo e permitir que as vazões de fluxo mudem durante o processo de deslocamento. Outra é atualizar a distribuição das linhas de fluxo à medida que o fluxo prossegue e manter a vazão de fluxo fixa em cada canal de fluxo. No segundo caso tanto o campo da pressão quanto a geometria das linhas de fluxo têm de ser atualizados periodicamente. Um problema que impediu o uso de canais de fluxo em larga escala no passado foi a extensão do método para três dimensões. A definição dos canais de fluxo em três dimensões, usando funções de fluxo, é muito difícil, mas o

desenvolvimento de novas técnicas (por exemplo, a definição de tempo de percurso) eliminou esta dificuldade.

Para casos de razão de mobilidade não-unitária, considerar as linhas de fluxo fixas no tempo é uma boa suposição se a heterogeneidade é fator dominante durante o deslocamento. Portanto, é mais aplicável a razões de mobilidade desfavoráveis e campos com permeabilidade heterogênea. Embora as linhas de fluxo evoluam durante um deslocamento com razão de mobilidade não-unitária, para um reservatório predominantemente heterogêneo, as linhas de fluxo mudam pouco. Um fato importante é que a ordem do tempo de irrupção de água das linhas de fluxo é preservada mesmo que o comprimento e o volume possam variar. As linhas de fluxo mais curtas ou com os menores volumes porosos sempre produzirão água mais cedo, pois as velocidades de fluxo são maiores, não importa como evoluam.

Martin e Wegner (1978) apresentaram resultados indicando que os métodos considerando linhas de fluxo fixas, fluxo bifásico e bidimensional, fases incompressíveis, negligenciando o efeito de segregação gravitacional e usando a teoria de Buckley e Leverett para calcular o deslocamento dos fluidos ao longo das linhas de fluxo são satisfatórios para muitos problemas (5-spot, 9-spot). Estes resultados demonstraram o efeito de mudanças nas mobilidades dos fluidos nas linhas de fluxo. As razões de mobilidade variaram de 0,1 a 1000.

Caracterizar um meio permeável heterogêneo usando dados de fluxo tipicamente requer a solução de um problema inverso. As propriedades das linhas de fluxo são usadas para deduzir o método inverso. A incorporação de dados coletados rotineiramente, tais como o histórico de fração de água, pode significativamente melhorar a caracterização das heterogeneidades do reservatório. Embora tais dados apresentem usualmente ruído, carregam informações úteis para a caracterização e a descrição das heterogeneidades do reservatório. O ajuste de histórico cumpre, pois, um importante papel no acompanhamento do progresso dos processos de deslocamento e na previsão do comportamento futuro do reservatório.

Depois que Vasco *et al.* (1996) introduziram o uso da técnica de linhas de fluxo no ajuste de histórico, Vasco *et al.* (1999), Vasco e Datta-Gupta (1999), Kulkarni e Datta-Gupta (2000), Wen *et al.* (1998) e Wang e Kovscek (2000) propuseram diferentes métodos, calculando a mudança necessária na permeabilidade para reproduzir a produção de água observada, com uma grande limitação : as previsões de produção assumem fluxo incompressível, sem efeito gravitacional. Agarwal e

Blunt (2001), baseados no trabalho de Wang e Kovscek (2000), estenderam a técnica de ajuste de histórico usando linhas de fluxo, considerando efeito gravitacional, fluxo trifásico e compressibilidade.

Em um método de linhas de fluxo, a pressão é calculada primeiro e define a posição das linhas de fluxo. As saturações são então propagadas ao longo daquelas linhas de fluxo. São particularmente eficazes em solucionar problemas extensos, geologicamente complexos e heterogêneos, onde o fluxo de fluido é ditado pelas vazões e posições dos poços, propriedades da rocha (permeabilidade, porosidade e distribuições de falhas), mobilidade dos fluidos (permeabilidade relativa e viscosidade das fases) e segregação gravitacional. Por outro lado, efeitos de pressão capilar e de compressibilidade não são modelados eficientemente por linhas de fluxo (Thiele, 2001).

Como já dito, em problemas bidimensionais, um canal de fluxo é limitado por duas linhas de fluxo. Em problemas tridimensionais, um canal de fluxo é limitado por quatro superfícies de fluxo. Assim, é muito difícil definir canais de fluxo em três dimensões, mas é fácil definir linhas de fluxo em duas dimensões. As linhas de fluxo são parametrizadas pelo tempo que leva uma partícula para viajar do início da linha de fluxo até um dado ponto sobre ela. Este parâmetro é denotado como a variável do tempo de percurso. Um dos problemas com as linhas de fluxo é que as mesmas não carregam qualquer informação de volume. A solução encontrada para resolver este problema foi associar uma vazão de fluxo a cada linha de fluxo e, então, calcular o volume acumulado ao longo da linha de fluxo simplesmente multiplicando pela coordenada do tempo de percurso da linha de fluxo.

A associação de vazões de fluxo monofásicas combinadas com tempo de percurso ao longo das linhas de fluxo possibilitou a implementação deste método em três dimensões. Calculando as saturações ao longo das linhas de fluxo, o problema tridimensional é reduzido a um conjunto de problemas unidimensionais.

Em um deslocamento multifásico, a irrupção de água em cada linha de fluxo contribui com uma pequena parcela para a curva de fração de água no poço produtor. Portanto, ordenando as linhas de fluxo segundo o seu tempo de irrupção de água, discretiza-se a curva de fração de água e relaciona-se os seus vários segmentos à irrupção de água de cada linha de fluxo.

### 3. Metodologia

O trabalho desenvolvido consiste da aplicação do método de linhas de fluxo a um problema de deslocamento de óleo pela água em um reservatório com variação vertical de permeabilidade submetido a um regime de dominação viscosa.

Após uma extensa revisão bibliográfica (capítulo 2), não se encontrou a solução analítica do problema, conforme o desenvolvimento a ser proposto.

No capítulo 4.1, a função de fluxo ( $\psi$ ), definindo as linhas de fluxo, e a função potencial de velocidade ( $\phi$ ), definindo as linhas equipotenciais, sua inter-relação e sua relação com o campo de velocidades são apresentadas para um sistema bidimensional.

No capítulo 4.2, a partir da lei de Darcy e da equação de balanço de massas, considerando reservatório horizontal, pressão capilar desprezível, fases óleo e água incompressíveis, conhecidas as curvas de permeabilidade relativa e, conseqüentemente, a curva de fluxo fracionário, obtêm-se a distribuição de saturação de água e de pressão, bem como de velocidade, no reservatório.

A seguir, faz-se uma transformação de coordenadas : passa-se de um sistema cartesiano ( $x,y$ ) para um sistema ( $\xi,\eta$ ), que melhor equaciona as linhas de fluxo. Assume-se que as linhas de fluxo não mudam, seja o fluxo monofásico e permanente, seja bifásico, isto é, determinadas as linhas de fluxo considerando fluxo monofásico, pode-se mantê-las no estudo do fluxo bifásico.

Após criadas e substituídas as novas variáveis ( $\xi(\eta,\psi)$  e  $\tau(\eta,t)$ ) na equação de balanço de massa, chega-se a uma equação semelhante à equação de Buckley e Leverett, de solução conhecida. Pode-se, então, calcular a saturação de água. Adicionalmente, chega-se a uma expressão para a vazão total de fluxo e para a vazão de água no poço produtor.

A seguir, no capítulo 4.3, apresenta-se uma simplificação do método para o caso de mobilidade total constante.

No capítulo 5.1, mostra-se a solução de um problema inverso, a saber, obter o fluxo fracionário e a mobilidade total, conhecidos alguns dados de produção : vazão, fração de água na vazão total no poço produtor (BSW) e diferencial de pressão entre o poço injetor e o produtor. O sistema de equações integrais, cuja solução resolve o problema, é apresentado. Uma simplificação do modelo para o caso de mobilidade total constante (capítulo 5.2), também, é apresentada.

Considerando um regime viscoso de deslocamento e definindo as pseudofunções para as permeabilidades efetivas e para o fluxo fracionário (capítulo 5.4), um deslocamento tridimensional de óleo pela água é resolvido e a distribuição vertical de permeabilidade é determinada a partir do histórico de fração de água no poço produtor (capítulo 5.5). Por hipótese, esta distribuição de permeabilidade é considerada log-normal.

A seguir, no capítulo 6, tenta-se modelar o crescimento da fração de água em um poço produtor, com os poços distribuídos segundo um arranjo 5-spot. Assume-se uma mobilidade total constante e a permeabilidade relativa à água função da saturação de água e de um parâmetro  $a$ , que deve ser ajustado durante o processo. Dadas algumas medidas de vazão, fração de água na vazão total relatada no poço produtor (BSW) e diferencial de pressão entre o poço injetor e o produtor, o primeiro objetivo é calcular um valor de  $a$  de forma que o BSW calculado pelo modelo ajuste satisfatoriamente ao BSW medido no poço produtor. Otimizado o parâmetro  $a$ , obtém-se a curva do fluxo fracionário. Considerando, também, a pseudofluxo fracionário, calcula-se a distribuição vertical de permeabilidade.

Para modelagem numérica, utilizou-se o programa Matlab.

## 4. O modelo de linhas de fluxo

### 4.1. Função de fluxo ( $\psi$ ) e função potencial de velocidade ( $\phi$ )

Se uma função vetorial, definida sobre alguma porção do plano ou do espaço tridimensional, conhecida em todo ponto da região do espaço, representa forças, a função é usualmente chamada campo de força. Se os valores da função representam velocidades, a função é usualmente chamada campo de velocidade.

A função potencial de um campo é uma função escalar definida sobre o domínio do campo e tendo a propriedade de que seu gradiente é a função vetorial definindo o campo. Nem todos os campos têm funções potenciais. Aqueles que as têm são ditos conservativos; e em tais campos a integral de linha da componente tangencial da força ou da velocidade é independente do caminho de integração e depende somente dos pontos extremos do caminho. Um resultado importante é que a função potencial satisfaz a equação de Laplace.

Visto que conhecer a função potencial de um campo é equivalente a conhecer o campo em si, porque o campo pode ser obtido imediatamente como o gradiente da função potencial, a determinação do potencial é importante na formulação de muitos problemas físicos. A maneira natural de fazer isto é solucionar a equação de Laplace e impor as condições de contorno apropriadas na solução, e freqüentemente isto tem de ser feito.

Suponha que a velocidade de um fluxo permanente bidimensional de fluido ideal, isto é, sem fricção e incompressível, seja conhecida em todo ponto da região de fluxo. Então, escolhendo adequadamente as unidades, a vazão com que o fluido atravessa qualquer arco pode ser determinada integrando a componente normal da velocidade de fluxo ao longo deste arco. Em particular, se não houver fontes e sumidouros na região, ou seja, nenhum ponto onde o fluido continuamente apareça e desapareça, então a integral da componente normal da velocidade ao redor de qualquer curva fechada é zero, haja vista que o fluido, sendo incompressível, não pode acumular no interior da curva. Isto, por sua vez, implica que entre quaisquer dois pontos, a integral de linha da componente normal da velocidade do fluido é independente do caminho.

Em qualquer instante de tempo, há, em todo ponto de um domínio de fluxo, um vetor velocidade  $\vec{u}$  [m/s] com uma direção definida. As curvas instantâneas, em

todo ponto tangentes à direção da velocidade neste ponto, são chamadas linhas de fluxo (Figura 2). A expressão matemática que define uma linha de fluxo é, portanto,

$$\vec{u} \times d\vec{r} = 0, \quad (1)$$

onde  $d\vec{r}$  [m] é um pequeno deslocamento (um elemento de arco) ao longo de uma linha de fluxo.

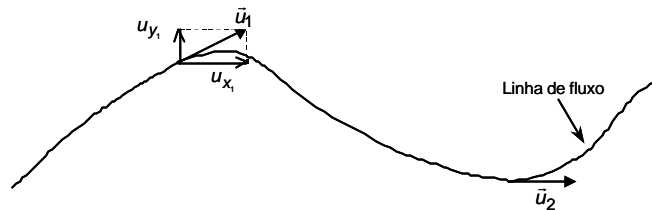


Figura 2 - Definição de linha de fluxo

A equação (1) é válida para qualquer sistema de coordenadas em que o produto vetorial é definido. Para um sistema de coordenadas  $(x,y,z)$ , inserindo a velocidade e o deslocamento na equação (1), obtém-se

$$(u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \times (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = 0 \quad (2)$$

e, efetuando o produto vetorial, chega-se a

$$\frac{dx}{u_x(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{u_y(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{u_z(x,y,z,t_0)}, \quad (3)$$

onde  $t_0$  indica um certo tempo.

A solução do sistema de equações dado pela equação (3) requer o conhecimento dos componentes da velocidade das partículas do fluido como função das coordenadas espaciais e do tempo. A integração do sistema de equações diferenciais leva à equação para a família de linhas de fluxo. Está claro que se duas linhas de fluxo correspondentes ao mesmo campo de velocidade interceptam-se no mesmo instante de tempo, o vetor velocidade teria duas diferentes direções neste ponto de interseção. Visto que não há nenhum significado físico em uma velocidade com duas direções diferentes, as linhas de fluxo não se interceptam em um problema físico. A única exceção a isto ocorre nos pontos onde a velocidade é zero, pois o vetor zero ou nulo não tem nenhuma direção inerente.

A equação (3) é válida para meio tanto isotrópico como anisotrópico. Para um fluxo descrito por

$$u_x = -\frac{k_x \cdot r}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; u_y = -\frac{k_y \cdot r}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}; u_z = -\frac{k_z \cdot r}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (4)$$

onde  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  [ $m^2$ ] são as permeabilidades absolutas do meio poroso nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $\mu$  [Pa.s] é a viscosidade e  $r$  [ $kg/m^3$ ] é a massa específica do fluido e  $\Phi$  [Pa.m/kg] é o potencial do fluido por unidade de massa, a equação (3) fica

$$\frac{dx}{(k_x \cdot \partial \Phi / \partial x)} = \frac{dy}{(k_y \cdot \partial \Phi / \partial y)} = \frac{dz}{(k_z \cdot \partial \Phi / \partial z)}. \quad (5)$$

Para um meio isotrópico,  $k_x = k_y = k_z = k$  na equação (5).

Como postulou-se a existência de uma superfície equipotencial  $\Phi = \text{constante}$ , pode-se considerar um deslocamento elementar  $d\vec{l}$  na direção normal a esta superfície. Então

$$\nabla \Phi \times d\vec{l} = 0; \quad \frac{dx}{\partial \Phi / \partial x} = \frac{dy}{\partial \Phi / \partial y} = \frac{dz}{\partial \Phi / \partial z} \quad (6)$$

que define curvas no espaço normais às superfícies equipotenciais. Estas são as linhas de fluxo. Considerando um meio isotrópico e multiplicando a equação (5), por  $k$ , obtém-se a equação (6). Assim, em um meio isotrópico, as linhas de fluxo são perpendiculares às superfícies equipotenciais. Desde que as equações diferenciais (5) definem o que acontece em um ponto, pode-se ter  $k = k(x,y,z)$ , isto é, um meio não homogêneo. Estas duas abordagens independentes para a definição de linhas de fluxo são possíveis; ambas baseadas em observações de fenômenos de campo.

No fluxo permanente, ou seja, aquele onde as características do fluxo permanecem invariáveis com o tempo, as linhas de fluxo mantêm-se fixas. No fluxo não permanente, as linhas de fluxo variam continuamente.

Além da função potencial ( $\Phi$ ), existe uma outra função que pode ser usada para obter os componentes da velocidade e vazões através de superfícies. Ela é consequência da conservação de massa e é denominada função de fluxo ( $\psi$ ).

Em um fluxo bidimensional no plano  $xy$ , a equação (3) torna-se

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \quad (7)$$

e pode ser rearranjada como

$$u_y \cdot dx - u_x \cdot dy = 0 \quad (8)$$

A solução da equação (8) é

$$\psi = \psi(x,y) = \text{constante} \quad (9)$$



que é a equação de uma linha de fluxo. A condição para que a equação (8) seja uma diferencial exata de alguma função  $y = y(x, y)$  é  $\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0$ , que é a equação da continuidade neste caso :  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ . Desde que  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  descreve o fluxo de um fluido incompressível em um meio indeformável (isto é,  $\partial(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) / \partial t = 0$ ), a função de fluxo  $y$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ], como definida aqui, é válida somente para tal caso.

Visto que  $y$  tem uma diferencial exata, ao longo de qualquer linha de fluxo, tem-se que

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial y} \cdot dy = u_y \cdot dx - u_x \cdot dy = 0 \quad (10)$$

donde pode-se obter as expressões para os componentes da velocidade

$$u_x = -\partial y / \partial y; \quad u_y = \partial y / \partial x. \quad (11)$$

A função  $y = y(x, y)$ , a qual é constante ao longo das linhas de fluxo (ou  $dy = 0$ ), é denominada função de fluxo do fluxo bidimensional.

Se O é um ponto arbitrário na região de fluxo e P é um ponto arbitrário sobre uma linha de fluxo, a vazão de fluxo através de todas curvas unindo O a P é uma constante. De fato, não havendo nenhum fluxo atravessando a linha de fluxo, o fluxo através de qualquer curva ligando O a qualquer ponto de uma linha de fluxo tem de ser constante independentemente do ponto. Assim, a cada linha de fluxo, tem associado um valor definido, chamado função de fluxo  $y$ , que é o valor comum de vazão de fluxo através de qualquer curva traçada de um ponto fixo arbitrário O a um ponto arbitrário desta linha de fluxo.

Se a função de fluxo é conhecida, a identidade de todo o fluxo é conhecida, pois, a partir da função de fluxo, as componentes da velocidade de fluxo podem ser encontradas imediatamente, como mostrado nas equações (11).

A interpretação física da função de fluxo  $y$  (usada para gerar a velocidade) pode ser feita como se segue. A Figura 3 mostra algumas linhas de fluxo rotuladas  $y_A, y_{A+\Delta y}, y_{A+2\Delta y}$ , etc. A direção de crescimento de  $y$  (ou do  $\nabla y$ ) é escolhida de forma que  $\nabla y$  é obtido a partir de  $\nabla j$  através de uma rotação anti-horária. Seja  $d\vec{A}$  um elemento de área de largura unitária (na direção  $z$ ) e comprimento  $ds$ , onde  $ds$  é o comprimento de um elemento de arco de um caminho arbitrário conectando os pontos A e B (sobre as linhas de fluxo  $y_A$  e  $y_B$ , respectivamente). A direção de  $d\vec{A}$  é perpendicular a  $d\vec{s}$  (onde  $d\vec{A} = dA \cdot 1\vec{n}$ ,  $d\vec{s} = ds \cdot 1\vec{s}$  e  $1\vec{n}$  é obtido a partir de  $1\vec{s}$

através de uma rotação anti-horária). Portanto, tem-se que  $d\vec{A} = 1\vec{z} \times d\vec{s}$  (isto é,  $1\vec{s}$ ,  $1\vec{n}$  e  $1\vec{z}$  formam um sistema retangular onde se aplica a regra da mão direita). Considere a integral

$$Q_{AB} = \int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{A} = \int_A^B \vec{u} \cdot (1\vec{z} \times d\vec{s}) = -\int_A^B u_x \cdot dy - u_y \cdot dx = -\int_A^B dy = y_A - y_B. \quad (12)$$

Assim, a vazão total entre duas linhas de fluxo (na realidade, entre duas superfícies de fluxo e os planos  $z = 0$ ,  $z = 1$ ) é dada pela diferença entre os valores das funções de fluxo correspondentes a estas linhas. A dimensão de  $y$  é volume por unidade de tempo por unidade de largura. É interessante notar que qualquer que seja o caminho escolhido para a integração entre A e B, o resultado da integração na equação (12) depende somente dos pontos extremos A e B. De acordo com a convenção de sinal empregada,  $y_A < y_B$ . Uma fronteira impermeável de um domínio do fluxo, com o fluxo sempre tangencial a ela, invariavelmente coincide com uma linha de fluxo.

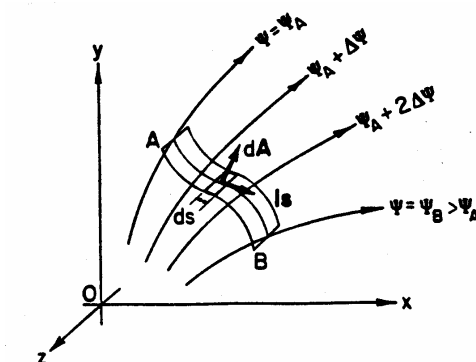


Figura 3 – A relação entre a função de fluxo e a vazão.

Deve ser notado que a função de fluxo não deriva do conceito de movimento irrotacional. A função  $y$  é uma consequência lógica do campo de velocidade e da conservação de massa. Se, entretanto, o campo de velocidade é irrotacional, então

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

e substituindo  $u_x$  e  $u_y$  pelas derivadas parciais de  $y$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

de forma que  $\psi$  também satisfaz a equação de Laplace para um fluxo bidimensional, irrotacional e incompressível.

Em um domínio isotrópico e homogêneo (permeabilidade  $k$  constante) e fluido incompressível (massa específica  $\rho$  constante) com viscosidade constante e fluindo no plano  $xy$  horizontal, definindo o potencial de velocidade  $\mathbf{j}$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] como

$$\mathbf{j} = \frac{k \cdot p}{\mathbf{m}}, \quad (15)$$

onde  $p$  [Pa] é a pressão, o vetor velocidade é dado por

$$\bar{u} = -\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \bar{j} \quad (16)$$

A partir das equações (11), sabe-se, também, que

$$\bar{u} = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \bar{i} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \bar{j} \quad (17)$$

Comparando estas duas equações, componente a componente, vê-se que

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \quad (19)$$

Estas duas equações são as bem conhecidas condições de Cauchy-Riemann para o fluxo bidimensional e incompressível em um meio isotrópico homogêneo. São, também, chamadas relações conjugadas, já que relacionam as funções  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{y}$ .

Uma relação geométrica entre linhas equipotenciais e linhas de fluxo é prontamente vista, notando que o vetor velocidade é dado por  $-\nabla \mathbf{j}$ , o que requer que a velocidade seja perpendicular às linhas de potencial de velocidade  $\mathbf{j}$  constante. Desde que os vetores de velocidade são tangentes às linhas de fluxo, as linhas de fluxo e equipotenciais têm de ser ortogonais em seus pontos de interseção (Figura 4).

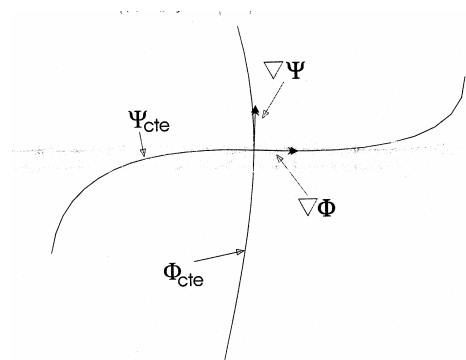


Figura 4 – Ortogonalidade entre linhas de fluxo e equipotenciais

#### 4.2. Fluxo bifásico e bidimensional

Para descrever o fluxo multifásico de fluidos no meio poroso, assume-se que a Lei de Darcy pode ser aplicada a cada uma das fases. Desta forma, quando o óleo é deslocado pela água em um sistema bidimensional, considerando desprezível a pressão capilar, as velocidades do óleo e da água são, respectivamente,

$$\bar{u}_o = -\frac{k \cdot k_{ro}}{m_o} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \bar{i} - \frac{k \cdot k_{ro}}{m_o} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \bar{j} = -\frac{k \cdot k_{ro}}{m_o} \cdot \nabla P \quad (20)$$

$$\bar{u}_w = -\frac{k \cdot k_{rw}}{m_w} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \bar{i} - \frac{k \cdot k_{rw}}{m_w} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \bar{j} = -\frac{k \cdot k_{rw}}{m_w} \cdot \nabla P \quad (21)$$

A velocidade total de fluxo é

$$\bar{U} = \bar{u}_o + \bar{u}_w = -k \cdot \left( \frac{k_{ro}}{m_o} + \frac{k_{rw}}{m_w} \right) \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \bar{j} \right) = -k \cdot I \cdot \nabla P, \quad (22)$$

$$\text{onde a mobilidade total é } I = \frac{k_{ro}(S_w)}{m_o} + \frac{k_{rw}(S_w)}{m_w} = I(S_w). \quad (23)$$

Então, da equação (21), obtém-se

$$\bar{u}_w = -\frac{k \cdot k_{rw}}{m_w} \cdot \nabla P = -\frac{k \cdot k_{rw}}{m_w} \cdot \frac{I}{I} \cdot \nabla P = -k \cdot I \cdot \nabla P \cdot \frac{k_{rw}/m_w}{I} = \bar{U} \cdot f_w, \quad (24)$$

$$\text{onde } f_w = \frac{k_{rw}/m_w}{I} = f_w(S_w) \text{ é o fluxo fracionário de água.} \quad (25)$$

Usando a equação de balanço de massa para ambas as fases (água e óleo), assumidas incompressíveis, chega-se a

$$\text{fase água : } f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial u_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{wy}}{\partial y} = f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u}_w = 0 \quad (26)$$

$$\text{fase óleo : } f \cdot \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + \frac{\partial u_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial u_{oy}}{\partial y} = f \cdot \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u}_o = 0 \quad (27)$$

Somando-se as equações (26) e (27), obtém-se

$$\nabla \cdot (\bar{u}_o + \bar{u}_w) = \nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (28)$$

Substituindo a equação (22) na equação (28),

$$\nabla \cdot \bar{U} = \nabla \cdot (-k \cdot I \cdot \nabla P) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (30)$$

A partir da solução da equação (30), determina-se a distribuição de pressão no reservatório.

Substituindo a equação (24) na equação (26),

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}_w = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{f}_w) = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + [\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \mathbf{f}_w + \mathbf{f}_w \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}})] = 0 \quad (31)$$

Usando a equação (28), chega-se a

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \mathbf{f}_w = 0 \quad (32)$$

A solução do sistema composto das equações (22), (28) e (32) permite determinar as incógnitas  $S_w$ ,  $P$  e  $\bar{\mathbf{U}}$ , enquanto que do sistema composto das equações (30) e (32), determina-se  $S_w$  e  $P$ .

Introduz-se, agora, o conceito de potencial de velocidade ( $\mathbf{j}$ ) e de função de fluxo ( $\mathbf{y}$ ). A equação  $\mathbf{j}(x,y) = \text{constante}$  define linhas equipotenciais. A equação  $\mathbf{y}(x,y) = \text{constante}$  define linhas de fluxo. As linhas de fluxo são perpendiculares às linhas equipotenciais. Desta forma, o gradiente de  $\mathbf{y}$  é perpendicular ao gradiente de  $\mathbf{j}$ ,

$$\nabla \mathbf{j} \cdot \nabla \mathbf{y} = 0, \text{ isto é, } \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

Mas,  $P = P(x,y) = P(\mathbf{j}(x,y), \mathbf{y}(x,y), t)$ , então

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \quad (34)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \quad (35)$$

Como não há fluxo cruzando as linhas de fluxo, ou seja,  $\frac{\partial P}{\partial \mathbf{y}} = 0$ , então  $P$

depende apenas de  $\mathbf{j}$  e independe de  $\mathbf{y}$  e

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \quad (36)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \quad (37)$$

Substituindo as equações (36) e (37) na equação (30), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( -k \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \quad (39)$$

que somadas, levam a

$$\nabla \cdot \bar{U} = \frac{\partial}{\partial j} \left( -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial j}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} \right) \cdot \left[ \frac{\partial j}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} \right] = 0 \quad (40)$$

Como  $\nabla \mathbf{j} \cdot \nabla \mathbf{y} = 0$ , então

$$\frac{\partial}{\partial j} \left( -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} \right) = 0, \quad (41)$$

o que leva a

$$k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} = H(\mathbf{y}, t). \quad (42)$$

A função adimensional  $H(\mathbf{y}, t)$  pode ser interpretada como a velocidade total de fluxo bifásico sobre a linha de fluxo definida por  $\mathbf{y}$ .

A partir da equação (22) e usando as equações (36), (37) e (42),

$$U_x = -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} \cdot \frac{\partial j}{\partial x} = -H(\mathbf{y}, t) \cdot \frac{\partial j}{\partial x} \quad (43)$$

$$U_y = -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = -k \cdot I \cdot \frac{\partial P}{\partial j} \cdot \frac{\partial j}{\partial y} = -H(\mathbf{y}, t) \cdot \frac{\partial j}{\partial y} \quad (44)$$

ou

$$\bar{U} = -H(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{j} \quad (45)$$

Assumindo que as linhas de fluxo não mudam, seja o fluxo monofásico, seja bifásico, pode-se obter a distribuição das linhas de fluxo considerando fluxo monofásico.

A velocidade de fluxo, para o fluxo monofásico e permanente, é denominada  $\bar{u}$  e o fluxo se dá na direção do gradiente do potencial de velocidade,

$$\bar{u} = -\nabla \mathbf{j} = -\frac{k}{m} \cdot \nabla p, \quad (46)$$

logo,

$$\mathbf{j}(x, y) = \frac{k}{m} \cdot p(x, y) \quad (47)$$

e

$$u_x = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \quad (48)$$

$$u_y = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y}. \quad (49)$$

O balanço de massa para o fluxo monofásico de um fluido incompressível leva a

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (50)$$

semelhante à equação (28).

Substituindo a equação (46) na equação (50), obtém-se

$$\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \left( -\frac{k}{m} \cdot \nabla p \right) = -\frac{k}{m} \cdot \nabla \cdot \nabla p = 0 \quad (51)$$

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (52)$$

Solucionando a equação (52), determina-se a distribuição de pressão  $p(x,y)$  para o fluxo monofásico e permanente no reservatório. Obtém-se o potencial de velocidade  $j(x,y)$  através da equação (47) e a função de fluxo  $y(x,y)$  por meio das equações (18) e (19).

Substituindo a equação (46) na equação (45),

$$\bar{U} = H(\mathbf{y}, t) \cdot \bar{u} \quad (53)$$

Substituindo a equação (45) na equação de balanço de massa (equação (32)),

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{j} \cdot \nabla f_w = 0 \quad (54)$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_w}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_w}{\partial y} \right) = 0 \quad (55)$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{j}} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (56)$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{j}} - H(\mathbf{y}, t) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{y}} = 0 \quad (57)$$

Substituindo as equações (33) e (49) na equação (57), obtém-se

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot (u_x^2 + u_y^2) \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{j}} = 0 \quad (58)$$

Sabendo que

$$|u|^2 = u_x^2 + u_y^2, \quad (59)$$

tem-se

$$f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot |u|^2 \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{j}} = 0 \quad (60)$$

que é a equação do balanço de massa nas coordenadas da linha de fluxo  $(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ . A função  $|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})$  é apresentada por vários autores, para alguns modelos de drenagem.

Definindo

$$\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y}) = - \int_{j_{inj}}^{\mathbf{j}} \frac{d\mathbf{j}}{|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})} \quad [\text{s}] \quad (61)$$

$$t(\mathbf{y}, t) = \int_0^t \frac{H(\mathbf{y}, t)}{f} \cdot dt \quad [\text{s}] \quad (62)$$

e substituindo na equação (60), obtém-se

$$f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot |u|^2 \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{j}} = 0 \quad (63)$$

$$f \cdot \frac{H(\mathbf{y}, t)}{f} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - H(\mathbf{y}, t) \cdot |u|^2 \cdot \left( - \frac{1}{|u|^2} \right) \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (65)$$

Mas,  $f_w = f_w(S_w(\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y}), t(\mathbf{y}, t)))$  e, então,

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + f'_w(S_w) \cdot \frac{\partial S_w}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (66)$$

A equação (66) é semelhante à equação de Buckley e Leverett, com as seguintes condições inicial e de contorno :

$$\begin{cases} \tau = 0 : S_w = S_{wi}, & f_w = 0 \\ \xi = 0 : S_w = 1 - S_{or}, & f_w = 1 \end{cases} \quad (67)$$

A solução da equação de Buckley e Leverett é auto-similar, isto é,

$$S_w(\mathbf{j}, \mathbf{y}, t) = S_w(\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y}), t(\mathbf{y}, t)) = S_w\left(\frac{\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})}{t(\mathbf{y}, t)}\right) = S_w(\mathbf{h}(\mathbf{j}, \mathbf{y}, t)), \quad (68)$$

onde

$$\mathbf{h}(\mathbf{j}, \mathbf{y}, t) = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})}{t(\mathbf{y}, t)}. \quad (69)$$



A solução é

$$S_w(\mathbf{h}) = \begin{cases} 1 - S_{or}, & \text{se } 0 < \mathbf{h} < f'_w(1 - S_{or}) \\ f_w^{-1}(\mathbf{h}), & \text{se } f'_w(1 - S_{or}) < \mathbf{h} < D = \frac{f_w(S_{wf}) - f_w(S_{wi})}{S_{wf} - S_{wi}} \\ S_{wi}, & \text{se } D = f'_w(S_{wf}) < \mathbf{h} < \infty \end{cases} \quad (70)$$

Assim, para a determinação da saturação  $S_{w_s}$ , deve-se conhecer as variáveis  $\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})$  e  $t(\mathbf{y}, t)$ . A variável  $\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})$  é calculada diretamente a partir de sua definição (equação (61)), pois assume-se que a função  $|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})$  é conhecida (obtida considerando-se o fluxo monofásico e permanente e dependente do arranjo de poços). Já a variável  $t(\mathbf{y}, t)$  não pode ser calculada diretamente a partir de sua definição (equação (62)), pois a função  $H(\mathbf{y}, t)$  não é conhecida.

Para o cálculo de  $t(\mathbf{y}, t)$ , integra-se a equação (42), ou seja,

$$\int_{P_{inj}}^{P_{prod}} dP = \frac{H(\mathbf{y}, t)}{k} \cdot \int_{j_{inj}}^{j_{prod}} \frac{dj}{I(S_w)}, \text{ para cada linha de fluxo.} \quad (71)$$

Fazendo

$$\Delta P = P_{inj} - P_{prod}, \quad (72)$$

então

$$\Delta P = -\frac{H(\mathbf{y}, t)}{k} \cdot \int_{j_{inj}}^{j_{prod}} \frac{dj}{I(S_w)}, \text{ para cada linha de fluxo.} \quad (73)$$

Considerando a definição de  $\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ , mostrada na equação (61), obtém-se

$$dj = -|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (74)$$

Substituindo a equação (74) na equação (73), chega-se, para cada linha de fluxo, a

$$\Delta P = \frac{H(\mathbf{y}, t)}{k} \cdot \int_0^{x_{prod}(\mathbf{y})} \frac{|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})}{I(S_w)} \cdot d\mathbf{x}, \quad (75)$$

onde

$$x_{prod}(\mathbf{y}) = - \int_{j_{inj}}^{j_{prod}} \frac{dj}{|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})}. \quad (76)$$

Calculando a inversa da equação (61), obtém-se  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e a função  $|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ , transforma-se em

$$|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y}) = |u|^2(\mathbf{j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (77)$$

A partir da equação (69),

$$|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J(\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{y}) \quad (78)$$

e

$$d\mathbf{x} = \mathbf{t} \cdot d\mathbf{h}, \text{ para cada linha de fluxo, em cada tempo.} \quad (79)$$

Substituindo as equações (78) e (79) na equação (75), obtém-se, para cada linha de fluxo,

$$\Delta P = \frac{H(\mathbf{y}, t)}{k} \cdot \mathbf{t} \cdot \int_0^{x_{prod}(\mathbf{y})/t} \frac{J(\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{y})}{I(S_w(\mathbf{h}))} \cdot d\mathbf{h} = \frac{H(\mathbf{y}, t)}{k} \cdot \mathbf{t} \cdot l(\mathbf{y}, t), \quad (80)$$

onde a integral

$$l(\mathbf{y}, t) = \int_0^{x_{prod}(\mathbf{y})/t} \frac{J(\mathbf{h} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{y})}{I(S_w(\mathbf{h}))} \cdot d\mathbf{h} \quad (81)$$

é conhecida.

Da definição de  $t(\mathbf{y}, t)$  (equação (62)), chega-se a  $H(\mathbf{y}, t)$ ,

$$H(\mathbf{y}, t) = f \cdot \frac{\partial t(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \quad (82)$$

Substituindo a equação (82) na equação (80), obtém-se, para cada linha de fluxo,

$$\Delta P = \frac{f}{k} \cdot \frac{\partial t(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{t} \cdot l(\mathbf{y}, t), \quad (83)$$

e, daí,

$$\int_0^t \Delta P \cdot dt = \frac{f}{k} \cdot \int_0^t \mathbf{t} \cdot l(\mathbf{y}, t) \cdot dt, \quad (84)$$

Invertendo a equação (84), obtém-se  $t(\mathbf{y}, t)$ . Conhecidos, então,  $\mathbf{x}(\mathbf{j}, \mathbf{y})$  e  $t(\mathbf{y}, t)$ , determina-se  $S_w(\mathbf{x}/t)$ .

Com a equação (82), chega-se a  $H(\mathbf{y}, t)$ . A variável  $H(\mathbf{y}, t)$  pode ser interpretada como a velocidade total do fluxo bifásico sobre a linha de fluxo definida por  $\mathbf{y}$ . Então, integrando-se  $H(\mathbf{y}, t)$  em  $\mathbf{y}$ , obtém-se a vazão total  $Q(t)$  por unidade de espessura do reservatório. De maneira semelhante à equação (24), para cada linha de fluxo, multiplicando-se  $H(\mathbf{y}, t)$  pela função de fluxo fracionário  $f_w(S_w)$ , medida no poço produtor ( $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{prod}$ ), obtém-se a velocidade de fluxo da fase água,

que integrada em  $y$ , resulta na vazão de água no poço produtor  $BSW(t) \cdot Q(t)$  por unidade de espessura do reservatório.

As variáveis  $j$  e  $y$  possuem dimensão  $[L^2/T]$  e variam nos seguintes intervalos :

$$j_{prod} = \frac{k}{m} \cdot p_{prod} \leq j \leq j_{inj} = \frac{k}{m} \cdot p_{inj} \text{ (a partir da equação (47))} \quad (85)$$

e

$$0 \leq y \leq q, \quad (86)$$

onde  $q$  é a vazão no fluxo monofásico por unidade de espessura do reservatório.

Definindo as variáveis adimensionais  $j_D$  e  $y_D$ , a partir de  $j$  e  $y$ , como

$$j_D = \frac{j - j_{inj}}{j_{prod} - j_{inj}}, \quad 0 \leq j_D \leq 1 \quad (87)$$

e

$$y_D = \frac{2p \cdot y - p \cdot q}{q}, \quad -p \leq y_D \leq p \quad (88)$$

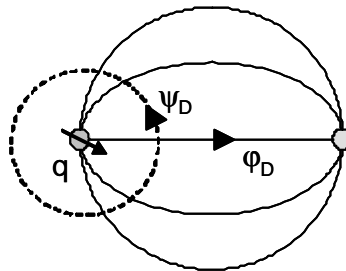


Figura 5 – Definição de  $j_D$  e  $y_D$

chega-se a

$$Q(t) = \frac{q}{2p} \cdot \int_{-p}^p H(y_D, t) \cdot dy_D \quad (89)$$

e

$$BSW(t) \cdot Q(t) = \frac{q}{2p} \cdot \int_{-p}^p f_w(S_w(1, y_D, t)) \cdot H(y_D, t) \cdot dy_D \quad (90)$$

#### 4.3. Simplificação do modelo para caso de mobilidade total constante

Assumindo  $I(S_w) = I_0 = \text{constante}$ , a equação (73) transforma-se em

$$\Delta P = -\frac{H(\mathbf{y}, t)}{k \cdot I_0} \cdot (\mathbf{j}_{prod} - \mathbf{j}_{inj}), \quad (91)$$

$$\text{onde } I_0 = \frac{k_{rwr}}{m_w} = \frac{k_{rowi}}{m_o} = \frac{k_{rw}(S_w)}{m_w} + \frac{k_{ro}(S_w)}{m_o}. \quad (92)$$

Considerando que as linhas de fluxo geradas durante um fluxo monofásico e permanente (aqui assumido um fluxo de água, com vazão  $q$  por unidade de espessura do reservatório e diferencial de pressão  $\Delta p$  entre o poço injetor e o produtor) são as mesmas geradas durante um fluxo bifásico, com um diferencial de pressão  $\Delta P$  constante entre os poços injetor e produtor, e usando a equação (47), obtém-se, a partir da equação (91),

$$H(\mathbf{y}, t) = I_0 \cdot m_w \cdot \frac{\Delta P}{\Delta p} = \text{constante} \quad (93)$$

Tendo-se  $H(\mathbf{y}, t)$ , pode-se obter  $t(\mathbf{y}, t)$  a partir de sua definição (equação (62)) como

$$t(\mathbf{y}, t) = \frac{H(\mathbf{y}, t)}{f} \cdot t = \frac{I_0 \cdot m_w}{f} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta p} \cdot t, \quad (94)$$

ou seja, dependente apenas do tempo  $t$ .

Conhecidos  $\mathbf{x}(\mathbf{j}_{prod}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(1, \mathbf{y}_D)$  e  $t(\mathbf{y}, t) = t(\mathbf{y}_D, t)$ , determina-se, através das equações (70),  $S_w \left( \frac{\mathbf{x}(1, \mathbf{y}_D)}{t(\mathbf{y}_D, t)} \right)$ .

Da equação (89), obtém-se o fluxo total,

$$Q(t) = q \cdot H(\mathbf{y}_D, t) = q \cdot I_0 \cdot m_w \cdot \frac{\Delta P}{\Delta p} = \text{constante} \quad (95)$$

e, da equação (90), o fluxo de água,

$$BSW(t) \cdot Q(t) = \frac{q \cdot H(\mathbf{y}_D, t)}{2p} \cdot \int_{-p}^p f_w(S_w(1, \mathbf{y}_D, t)) \cdot d\mathbf{y}_D \quad (96)$$

e, daí,

$$BSW(t) = \frac{1}{2p} \cdot \int_{-p}^p f_w(S_w(1, \mathbf{y}_D, t)) \cdot d\mathbf{y}_D. \quad (97)$$

## 5. Problema inverso

### 5.1. Dedução da equação integral

O problema inverso consiste na obtenção de  $f_w(S_w)$  e  $I(S_w)$ , conhecendo-se apenas os dados de produção  $Q(t)$ ,  $BSW(t)$  e  $P$ .

Partindo da equação (73),

$$\Delta P = -\frac{H(\mathbf{y}_D, t)}{k} \cdot \int_{j_{inj}}^{j_{prod}} \frac{dj}{I(S_w)} = \frac{H(\mathbf{y}_D, t)}{k} \cdot (j_{inj} - j_{prod}) \cdot \int_0^1 \frac{dj_D}{I(S_w)} \quad (98)$$

$$\Delta P = \frac{H(\mathbf{y}_D, t)}{k} \cdot (j_{inj} - j_{prod}) \cdot \int_0^1 \frac{dj_D}{I(S_w)} \quad (99)$$

e usando a equação (46),

$$\Delta P = \frac{H(\mathbf{y}_D, t)}{k} \cdot \frac{k}{m} \cdot (p_{inj} - p_{prod}) \cdot \int_0^1 \frac{dj_D}{I(S_w)} \quad (100)$$

$$\Delta P = \frac{\Delta p}{m} \cdot H(\mathbf{y}_D, t) \cdot \int_0^1 \frac{dj_D}{I\left(S_w\left(\frac{\mathbf{x}(j_D, \mathbf{y}_D)}{t(\mathbf{y}_D, t)}\right)\right)} \quad (101)$$

A equação (61), em variáveis adimensionais, fica

$$\mathbf{x}(j_D, \mathbf{y}_D) = \frac{k \cdot \Delta p}{m} \int_0^{j_D} \frac{dj'_D}{|u|^2(j'_D, \mathbf{y}_D)} \quad (102)$$

Da equação (102), tem-se que

$$dj_D = \frac{m}{k \cdot \Delta p} \cdot |u|^2(j_D, \mathbf{y}_D) \cdot dx \quad (103)$$

Substituindo a equação (103) na equação (101), obtém-se

$$\Delta P = \frac{H(\mathbf{y}_D, t)}{k} \cdot \int_0^{x_{prod}(\mathbf{y}_D)} \frac{|u|^2(j_D, \mathbf{y}_D)}{I\left(S_w\left(\frac{\mathbf{x}(j_D, \mathbf{y}_D)}{t(\mathbf{y}_D, t)}\right)\right)} \cdot dx \quad (104)$$

onde

$$x_{prod}(\mathbf{y}_D) = \frac{k \cdot \Delta p}{m} \int_0^1 \frac{dj_D}{|u|^2(j_D, \mathbf{y}_D)} \quad (105)$$

Calculando a inversa da equação (102), obtém-se  $j_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}_D)$ , que, juntamente com a equação (69), transforma  $|u|^2(j_D, \mathbf{y}_D)$  em

$$|u|^2(j_{D,y_D}) = |u|^2(j_D(x(h,t),y_D),y_D) = J_D(x(h,t),y_D) = J_D(h \cdot t, y_D), \quad (106)$$

semelhante à equação (78).

Substituindo as equações (79) e (106) na equação (104), chega-se a

$$\Delta P = \frac{H(y_D, t)}{k} \cdot t \cdot \int_0^{x_{prod}(y_D)/t} \frac{J_D(h \cdot t, y_D)}{I(S_w(h))} \cdot dh \quad (107)$$

Lembrando que  $h = f'_w(S_w) \rightarrow dh = f''_w(S_w) dS_w$  e substituindo na equação (107), tem-se que

$$\Delta P = \frac{H(y_D, t)}{k} \cdot t \cdot \int_{1-S_{or}}^{S_w(x_{prod}(y_D)/t)} \frac{J_D(f'_w(S_w) \cdot t, y_D)}{I(S_w(h))} \cdot f''_w(S_w) \cdot dS_w \quad (108)$$

As equações (62), (89), (90) e (108) formam o sistema de equações do problema inverso, com as incógnitas  $t(y_D, t)$ ,  $H(y_D, t)$ ,  $I(S_w)$  e  $f_w(S_w)$ , a saber

$$\left\{ \begin{array}{l} t(y_D, t) = \int_0^t \frac{H(y_D, t)}{f} \cdot dt \\ Q(t) = \frac{q}{2p} \cdot \int_{-p}^p H(y_D, t) \cdot dy_D \\ BSW(t) \cdot Q(t) = \frac{q}{2p} \cdot \int_{-p}^p f_w(S_w(1, y_D, t)) \cdot H(y_D, t) \cdot dy_D \\ \Delta P = \frac{H(y_D, t)}{k} \cdot t \cdot \int_{1-S_{or}}^{S_w(x_{prod}(y_D)/t)} \frac{J_D(f'_w(S_w) \cdot t, y_D)}{I(S_w(h))} \cdot f''_w(S_w) \cdot dS_w \end{array} \right. \quad (109)$$

## 5.2. Simplificação do modelo para caso de mobilidade total constante

Assumindo  $I(S_w) = I_0 = \text{constante}$ , conhecido  $BSW(t)$ , invertendo a equação (97), obtém-se  $f_w(S_w(1, \mathbf{y}_D, t))$ .

### 5.3. Caracterização dos regimes de deslocamento de óleo pela água

O deslocamento tridimensional de óleo pela água é o resultado da ação simultânea de forças viscosas, capilares e gravitacionais. Dependendo de qual força domina, um regime de dominação viscosa, capilar ou gravitacional ou sua combinação ocorre em um reservatório real. Para cada regime, pseudofunções podem ser definidas e, então, a distribuição de permeabilidade pode ser determinada a partir do histórico de fração de água no poço produtor.

As relações entre forças viscosas, capilares e gravitacionais são explicitadas por três parâmetros adimensionais, determinando o regime de deslocamento para um reservatório real, dadas a espessura ( $h$ ) do reservatório, a velocidade do fluxo ( $U$ ), a permeabilidade absoluta ( $k$ ), a anisotropia ( $k_v/k_h$ ), a porosidade ( $f$ ), a distância entre o injetor e o produtor ( $L$ ), a tensão interfacial entre o óleo e a água ( $s$ ), as massas específicas da água ( $r_w$ ) e do óleo ( $r_o$ ), as viscosidades do óleo ( $m_b$ ) e da água ( $m_w$ ) e o ângulo de contato ( $\Theta$ ) medido através da fase água durante um ensaio laboratorial de molhabilidade. Tais parâmetros adimensionais são :

i) razão entre as forças capilares e viscosas :

$$e_1 = \frac{s \cdot \cos \Theta}{\sqrt{k/f} \cdot \Delta P} = \frac{s \cdot \cos \Theta \cdot \sqrt{k \cdot f}}{U \cdot m_o \cdot L} = \frac{P_c}{\Delta P} \quad (110)$$

ii) razão considerando a anisotropia :

$$e_2 = \frac{h^2}{L^2 \cdot (k_v/k_h)} \quad (111)$$

iii) razão entre as forças gravitacionais e capilares :

$$e_3 = \frac{(r_w - r_o) \cdot g \cdot h}{s \cdot \cos \Theta / \sqrt{k/f}} \quad (112)$$

As condições para um regime de fluxo de dominação viscosa são

$$e_1/e_2 \ll 1; e_2 \ll 1; e_3 \ll 1 \text{ ou } e_3 \approx 1, \quad (113)$$

para o equilíbrio vertical,

$$e_1/e_2 \gg 1; e_3 \approx 1, \quad (114)$$

para um regime de fluxo de dominação capilar,

$$e_1/e_2 \gg 1; e_3 \ll 1 \quad (115)$$

e para um regime de fluxo de dominação gravitacional,

$$e_1/e_2 \gg 1; e_3 \gg 1. \quad (116)$$



#### 5.4. Determinação das pseudofunções

Em nosso estudo, considerou-se um deslocamento com dominação viscosa. Em um deslocamento viscoso, as forças capilares e gravitacionais podem ser desprezadas.

Definindo a variável adimensional  $Z$  como a distância vertical a partir da base de um reservatório horizontal dividida pela espessura total do reservatório e assumindo que a permeabilidade horizontal seja bem maior que a permeabilidade vertical, pode-se rearranjar a distribuição de permeabilidade de forma que se tenha um reservatório equivalente com permeabilidade crescente com a profundidade  $k(Z)$ . Assim, a saturação de água média, na seção vertical (Figura 6), pode ser expressa por

$$\bar{S}_w = \int_0^1 S_w(x, Z, t) \cdot dZ = (1 - S_{or}) \cdot Z + S_{wi} \cdot (1 - Z), \quad (117)$$

onde

$$Z(\bar{S}_w) = \frac{\bar{S}_w - S_{wi}}{1 - S_{or} - S_{wi}} \quad (118)$$

é a posição da frente de avanço, medida a partir da base do reservatório.

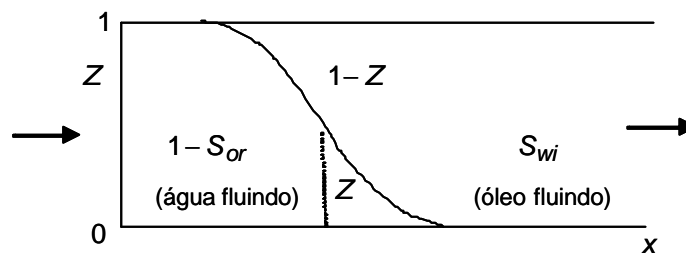


Figura 6 - Posição da frente de avanço de água, quando a permeabilidade é crescente com a profundidade

A permeabilidade média é

$$\bar{k} = \int_0^1 k(Z) \cdot dZ \quad (119)$$

e as permeabilidades adimensionais são obtidas dividindo-se as permeabilidades pela permeabilidade média, isto é,

$$K(Z) = \frac{k(Z)}{\bar{k}} \quad (120)$$

Definindo as pseudopermeabilidades efetivas das fases como

$$\tilde{K}_w(Z) = k_{rwor} \cdot \int_0^Z K(Z) \cdot dZ \quad (121)$$

$$\tilde{K}_o(Z) = k_{rowi} \cdot \int_Z^1 K(Z) \cdot dZ \quad (122)$$

o pseudofluxo fracionário de água em cada seção  $x$  é

$$\tilde{F}_w(Z) = \frac{\tilde{K}_w(Z)}{\tilde{K}_w(Z) + \frac{m_w}{m_o} \cdot \tilde{K}_o(Z)} \quad (123)$$

$$\tilde{F}_w(Z) = \frac{\int_0^Z K(Z) \cdot dZ}{\int_0^Z K(Z) \cdot dZ + \frac{1}{M} \cdot \int_Z^1 K(Z) \cdot dZ}, \quad (124)$$

onde

$$M = \frac{k_{rwor} \cdot m_o}{k_{rowi} \cdot m_w} \quad (125)$$

é a razão entre a mobilidade da água, determinada na saturação de óleo residual, e a do óleo, determinada na saturação de água irreduzível.

### 5.5. Determinação da distribuição vertical das permeabilidades

Sabendo que

$$\int_Z^1 K(Z) \cdot dZ = \int_0^1 K(Z) \cdot dZ - \int_0^Z K(Z) \cdot dZ = 1 - \int_0^Z K(Z) \cdot dZ \quad (126)$$

e chamando

$$\int_0^Z K(Z) \cdot dZ = I(Z), \quad (127)$$

pode-se escrever a equação (124) como

$$\tilde{F}_w(Z) = \frac{I(Z)}{I(Z) + \frac{(1-I(Z))}{M}} \quad (128)$$

e

$$\bar{k} \cdot \tilde{F}_w(Z) = \bar{k} \cdot \frac{I(Z)}{I(Z) + \frac{(1-I(Z))}{M}} \quad (129)$$

Da solução do problema inverso, mostrada anteriormente, obtém-se  $f_w(S_w)$  e  $S_w$  no poço produtor.

Da equação (129), obtém-se, igualando  $f_w(S_w)$  e  $\tilde{F}_w(Z)$ , uma expressão para  $I(Z)$ . Daí, com a inversão da equação (127), chega-se a  $K(Z)$  ou, conhecido  $\bar{k}$ ,  $k(Z) = K(Z) \cdot \bar{k}$ , assumindo uma regra para a distribuição de  $k(Z)$ .

Assumiu-se uma distribuição de permeabilidades log-normal ao longo da espessura do reservatório, ou seja,

$$F(k) = \frac{1}{b \cdot k \cdot \sqrt{2p}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln k - a}{b}\right)^2\right). \quad (130)$$

A permeabilidade média é igual a

$$\bar{k} = \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \quad (131)$$

Trabalhando com a permeabilidade normalizada  $K$  (equação (120)), a permeabilidade média da distribuição é igual a 1 e, então,

$$1 = \exp\left(a + \frac{b^2}{2}\right) \rightarrow 0 = a + \frac{b^2}{2} \rightarrow a = -\frac{b^2}{2}, \quad (132)$$

isto é, conhecido  $b$ , conhece-se também  $a$ .

## 6. Aplicação a dados de campo

Os dados de produção são as fontes mais freqüentes e confiáveis de dados, freqüentemente as únicas disponíveis. Portanto, é muito importante tirar o máximo proveito delas.

Uma metodologia para a identificação do sistema de fluxo foi aplicada numa tentativa de modelar as variações do fluxo fracionário de água  $f_w$  nos poços produtores. O processo de identificação é classicamente realizado usando um método de inversão aplicado a um histórico conhecido de dados de saída (output) e de entrada (input) do modelo. Supõe-se que nenhuma variação (intervenções em poços) no sistema ocorra durante o período usado para sua identificação. Além disso, a evolução da saturação de água é suposta ser gradativa.

O sistema estudado aqui é definido por uma saída observada, o fluxo fracionário de água  $f_w$ , e por duas entradas, a vazão total  $Q$  e a queda de pressão constante entre o poço injetor e o produtor  $\Delta P$ .

Assumiu-se que a mobilidade total,  $I(S_w)$ , é constante e igual a  $I_0 = \frac{k_{rwor}}{m_w} = \frac{k_{rowi}}{m_o} = \frac{k_{rw}(S_w)}{m_w} + \frac{k_{ro}(S_w)}{m_o}$  e a permeabilidade relativa à água é dada por

$$k_{rw}(S_w, a) = k_{rwor} \cdot \left( \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{or} - S_{wi}} \right)^a. \quad (133)$$

Daí, pode-se calcular  $k_{ro}(S_w, a)$ , já que  $I(S_w) = I_0$ , e, então,  $f_w(S_w, a)$ .

O parâmetro desconhecido é o expoente  $a$  da fórmula de  $k_{rw}(S_w, a)$ . Dadas algumas medidas de entradas e saídas do sistema, o objetivo é calcular uma estimativa do parâmetro desconhecido de forma que a saída calculada pelo modelo ajuste bem à saída observada realmente.

Um padrão de injeção 5-spot foi usado para a avaliação do modelo de linhas de fluxo apresentado, embora ele possa ser usado qualquer que seja o número e a distribuição de poços. Considerou-se fluxo viscoso em um reservatório com as características mencionadas na Tabela 1. O modelo assume que o reservatório está originalmente saturado com água irreductível e óleo. A vazão de injeção considerada é de 50 m<sup>3</sup>/d e o diferencial de pressão  $\Delta P$  estimado entre o injetor e o produtor é de 50 kgf/cm<sup>2</sup>. A distribuição dos poços é mostrada na Figura 7.

Espessura porosa vertical (m)	5,0
$S_{wi}$ (%)	29,0
$S_{or}$ (%)	30,0
$f$ (%)	29,0
$\bar{k}$ (mD)	350,0
$k_{rwor}$	0,10
$k_{rowi}$	0,80
Pressão original (kgf/cm <sup>2</sup> )	48,0
Pressão atual (kgf/cm <sup>2</sup> )	35,0
Pressão de saturação (kgf/cm <sup>2</sup> )	2,0
Razão de solubilidade (m <sup>3</sup> std / m <sup>3</sup> std)	1,0
$\mu_o$ (cp)	18,5
$\mu_w$ (cp)	0,5
Fator volume de formação do óleo (m <sup>3</sup> / m <sup>3</sup> std)	1,028
Fator volume de formação da água (m <sup>3</sup> / m <sup>3</sup> std)	1,015
Mecanismo de produção	Expansão dos fluidos
Distância entre produtores (m)	400,0
Distância entre produtor e injetor (m)	280,0

Tabela 1 – Características do reservatório estudado

(dados completos para o modelo com mobilidade total variável)

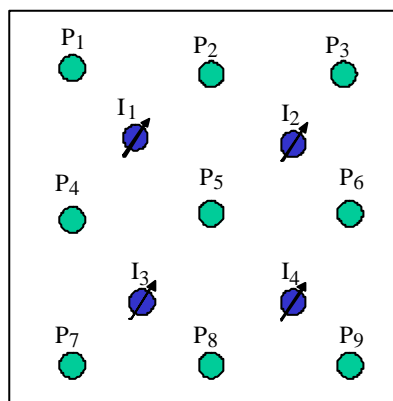


Figura 7 – Distribuição dos poços no reservatório estudado.

A água injetada e o óleo deslocado percorrem as linhas de fluxo. Cada linha de fluxo é um caminho independente de fluxo, pois nunca se interceptam. Todas as

linhas de fluxo estão sujeitas ao mesmo diferencial de pressão (todas começam em um injetor e terminam em um produtor).

O cálculo do deslocamento é feito ao longo de cada linha de fluxo. O óleo está sendo deslocado pela água injetada e ambos os fluidos são considerados incompressíveis. O conjunto de equações descrevendo este processo consiste da lei de Darcy e da equação de balanço de massa. Conhecida a distribuição de pressões no reservatório, a função potencial de velocidade  $\mathbf{j}$  é conhecida e o campo de velocidades é calculado. Logo, a função de fluxo  $\mathbf{y}$  é determinada.

Assumiu-se que as linhas de fluxo não variam com o tempo e, uma vez determinadas para um fluxo monofásico, mantêm-se fixas qualquer que seja a razão de mobilidade entre o fluido deslocante (água) e o fluido deslocado (óleo). Em um sistema de coordenadas  $(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ , o problema bidimensional pode ser dividido em vários problemas unidimensionais. Estes podem ser resolvidos usando a equação de Buckley e Leverett (equação (66)) e as vazões de cada uma das fases líquidas incompressíveis no poço produtor podem ser calculadas a partir do conhecimento da transformação  $(x, y) \rightarrow (\mathbf{j}, \mathbf{y})$ .

A função  $|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ , necessária aos cálculos, foi obtida em Bedrikovetsky (1993), considerando um arranjo de poços 5-spot, como

$$|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y}) = \frac{w^2}{\sqrt{2}} \cdot \left( \cosh\left(\frac{8 \cdot \mathbf{p} \cdot (\mathbf{j} - c)}{q}\right) - \cos\left(\frac{8 \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}}{q}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (134)$$

$$w = \frac{q}{\sqrt{2} \cdot \mathbf{p} \cdot d} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dd}{(d^4 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (135)$$

$$c = \frac{k}{2 \cdot \mu_i} \cdot (p_{inj} + p_{prod}) \quad (136)$$

onde

$d$  = metade da distância entre os poços produtores [m],

$q$  = vazão monofásica, com fluxo permanente, por unidade de espessura do reservatório [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

Determinado  $H(\mathbf{y}_D, t)$  (equação (93)), obtém-se  $t(\mathbf{y}_D, t)$  (equação (94)). Conhecido  $|u|^2(\mathbf{j}, \mathbf{y})$ , obtém-se  $\mathbf{x}(\mathbf{j}_{prod}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(1, \mathbf{y}_D)$  diretamente de sua definição (equação (61)). Com  $\mathbf{x}(1, \mathbf{y}_D)$  e  $t(\mathbf{y}_D, t)$ , calcula-se a saturação de água  $S_w(1, \mathbf{y}_D, t)$  no poço produtor, para cada linha de fluxo  $\mathbf{y}_D$ . A partir da curva de fluxo fracionário

$f_w(S_w, a)$ , determina-se  $BSW(t, a)$  (equação 97). Calculado  $BSW(t, a)$ , utiliza-se um método de regressão linear para ajustá-lo aos dados reais  $BSW(t)$  observados e otimizar o parâmetro  $a$ .

Os dados brutos registrados no campo são bastante ruidosos e, por isso, fez-se uma suavização do conjunto de dados disponíveis. Procurou-se, então, ajustar uma curva que representasse a variação do  $BSW$  ao longo do tempo no poço P5 e pudesse ser utilizada para resolver o problema inverso. O resultado de tal procedimento pode ser visto na Figura 8.

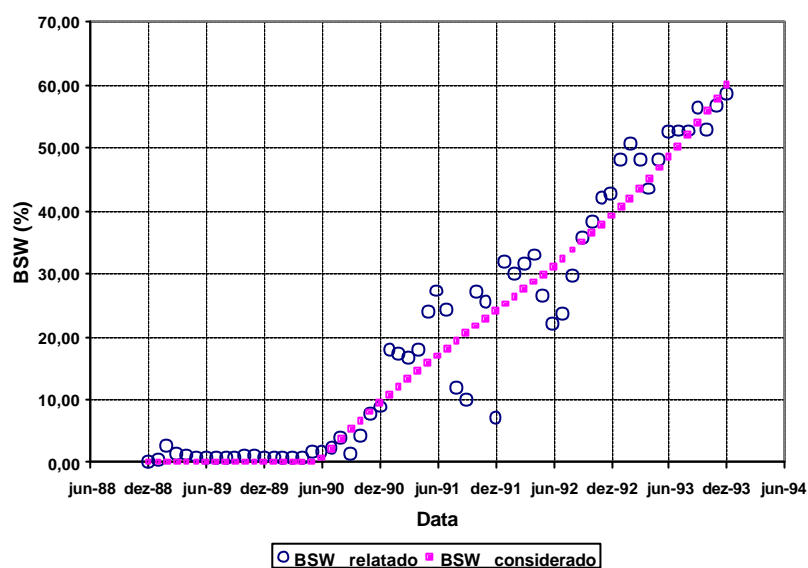


Figura 8 – Caso real : BSW relatado e BSW adotado.

Tendo a curva de fluxo fracionário  $f_w(S_w, a)$ , já com o parâmetro  $a$  otimizado (Figura 9), consideram-se as hipóteses de um reservatório com condutividade vertical desprezível e permeabilidade variando somente com a profundidade e, então, calcula-se a distribuição da permeabilidade com a profundidade  $k(Z)$  (Figura 10). Nesta aplicação, assumiu-se uma distribuição vertical log-normal de  $k(Z)$ .

O ajuste do BSW calculado pelo modelo ao BSW adotado foi considerado satisfatório. Um melhor ajuste poderia talvez ser alcançado se uma outra equação definindo a permeabilidade relativa à água em função da saturação de água, ao invés da equação (133), fosse tomada.

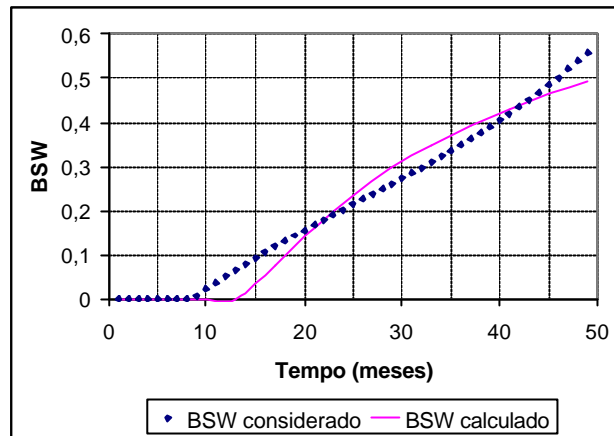


Figura 9 – BSW calculado após o ajuste do parâmetro a.

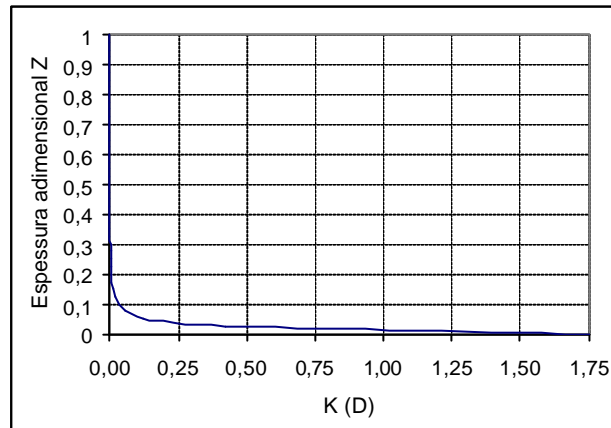


Figura 10 – Distribuição vertical de permeabilidade



## 7. Conclusões

A caracterização do reservatório aproveitando dados de produção é bastante conveniente já que espelha uma situação real e permite prever comportamentos futuros com maior confiabilidade.

Após uma extensa revisão bibliográfica não se encontrou a solução analítica do problema da modelagem matemática, usando linhas de fluxo, para determinar a distribuição vertical de permeabilidade a partir do histórico de produção de um poço.

O modelo analítico desenvolvido permite calcular a distribuição vertical de permeabilidades de acordo com uma regra conhecida, a partir de dados reais, levando em consideração a área de influência dos poços. Eventuais heterogeneidades estão, portanto, sendo consideradas.

O uso da técnica de linhas de fluxo mostrou-se bastante eficiente e rápida, já que permite resolver problemas bi e tridimensionais através da solução de um problema unidimensional, aplicando a clássica teoria de Buckley e Leverett.

O problema inverso para a obtenção do fluxo fracionário de água e da mobilidade total, conhecidos alguns dados de produção, foi regularizado usando o método de linhas de fluxo.

No caso geral de razão de mobilidade total variável, o problema inverso é descrito por um sistema de quatro equações integrais com quatro incógnitas. No caso particular de razão de mobilidade total constante,  $f_w(S_w)$  é obtido invertendo-se uma única equação.

A definição de pseudofunções permitiu resolver um deslocamento tridimensional de óleo pela água e calcular a distribuição vertical de permeabilidade. Qualquer que seja o regime que domine o deslocamento do óleo pela água, a distribuição vertical de permeabilidade pode ser determinada a partir da pseudofunção de fluxo fracionário, usando as fórmulas aqui deduzidas.

Houve muita dificuldade para se modelar numericamente o problema utilizando o programa Matlab, chegando-se a resultados apenas satisfatórios. Sistemas simples são bem modelados com programas interpretados (Matlab, Java). Entretanto, sistemas complexos ou com muitos dados, como o desenvolvido neste trabalho, são melhor solucionados através de programas compilados (C++, Fortran).

A metodologia proposta pode ser adaptada a várias situações de arranjos de poços e diferentes processos de deslocamentos (imiscíveis e miscíveis).

## 7.1 Sugestões

- Desenvolver as simulações utilizando um programa compilado (a partir de uma linguagem de programação) ao invés de Matlab;
- Desenvolver uma solução analítica geral para um modelo tridimensional;
- Programar e aplicar o equacionamento feito considerando mobilidade total variável;
- Comparar os resultados obtidos com o modelo descrito àqueles obtidos com outros modelos, analíticos ou numéricos.

## 8. Bibliografia

Agarwal, B., Blunt, M.J. (2001) Full-Physics, Streamline-Based Method for History Matching Performance Data of a North Sea Field. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, SPE 66388, Houston.

Baker, R. (2001) Streamline Technology : Reservoir History Matching and Forecasting = its Success, Limitations, and Future. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 40 (4) : 23-27.

Batycky, R.P., Blunt, M.J., Thiele, M.R. (1997) A 3D Field-Scale Streamline Based Reservoir Simulator. *SPE Reservoir Engineering*, November 1997 : 4.

Bear, J. (1988) *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Reprint. New York : Dover Publications, Inc., 764 p.

Bedrikovetsky, P. (1993) *Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery*. London/Boston : Kluwer Academic Publishers, xxx p.

Bedrikovetsky, P. (1999) *Advanced Waterflooding Reservoir Modelling & Characterisation*. Technical University of Denmark, 330 p.

Bratvedt, F., Gimse, T., Tegnander, C. (1996) Streamline Computations for Porous Media Flow Including Gravity. *Transport in Porous Media*, 25 (1) : 63-78.

Dake, L.P. (1978) *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Amsterdam : Elsevier Science B. V., 443 p.

Doyle, R.E., Wurl, T.M. (1971) Stream Channel Concept Applied to Waterflood Performance Calculations for Multiwell, Multizone Three-Component Cases. *Journal of Petroleum Technology*, March 1971 : 373-380.

Hastings, J.J., Muggeridge, A.H., Blunt, M.J. (2001) A New Streamline Method for Evaluating Uncertainty in Small-Scale, Two-Phase Flow Properties. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, SPE 66349, Houston.

Higgins, R.V., Leighton, A.J. (1962) A Computer Method to Calculate Two-Phase Flow in any Irregularly Bounded Porous Media. *Journal of Petroleum Technology*, June 1962 : 679-683.

Ingebrigtsen, L., Bratvedt, F., Berge, J. (1999) A Streamline Based Approach to Solution of Three-Phase Flow. 1999 *SPE Reservoir Simulation Symposium*, SPE 51904, Houston.

Kulkarni, K.N., Datta-Gupta, A. (2000) Estimating Relative Permeability from Production Data : a Streamline Approach. *SPE Journal*, Vol. 5, No. 4, December 2000 : 402-411.

Le Blanc, J.L., Caudle, B.H. (1971) A Streamline Model for Secondary Recovery. *Society of Petroleum Engineers Journal*, March 1971 : 7-12.

Martin, J.C., Wegner, R.E. (1979) Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Stream-Tube Relationships. *Society of Petroleum Engineers Journal*, October 1979 : 313-323.

Martin, J.C., Woo, P.T., Wegner, R.E. (1973) Failure of Stream Tube Methods to Predict Waterflood Performance of an Isolated Inverted Five-Spot at Favorable Mobility Ratios. *Journal of Petroleum Technology*, February 1973 : 151-153.

Peddibhotla, S., Datta-Gupta, A., Xue, G. (1997) Multiphase Streamline Modeling in Three Dimensions : Further Generalizations and a Field Application. 1997 *SPE Reservoir Simulation Symposium*, SPE 38003, Dallas.

Portella, R.C.M., Hewett, T.A. (1997) Fast 3-D Reservoir Simulation and Applications Using Streamlines. *Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition*, SPE 39061, Rio de Janeiro.

Reis, L.C., Lemos, W.P., Portella, R.C.M. (2002) Utilização de Simulador de Linhas de Fluxo como Ferramenta Auxiliar nos Campos de Barracuda e Caratinga. *Seminário de Reservatórios 2002*, Angra dos Reis : PETROBRAS.

Thiele, M.R., Batycky, R.P., Blunt, M.J., Orr Jr., F.M. (1973) Simulating Flow in Heterogeneous Systems Using Streamtubes and Streamlines. *SPE Reservoir Engineering*, February 1996 : 5-12.

Thiele, M.R. (2001) Streamline Simulation. Notas apresentadas no Forum on Reservoir Simulation, Schloss Fuschl, Austria, setembro 2001.

Vasco, D.W., Datta-Gupta, A., Long, J.C.S. (1996) Integrating Field Production History in Stochastic Reservoir Characterization. 1996 *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, SPE 36567, Denver.

Vasco, D.W., Datta-Gupta, A. (1999) Asymptotic Solutions for Solute Transport : a Formalism for Tracer Tomography. *Water Resources Research*, 35 (1) : 1-12.

Vasco, D.W., Yoon, S., Datta-Gupta, A. (1999) Integrating Dynamic Data into High-Resolution Reservoir Models Using Streamline-Based Analytic Sensitivity Coefficients. *SPE Journal*, Vol. 4, No. 4, December 1999 : 389-399.

Wang, Y. Kovysek, A.R. (2000) A Streamline Approach for History-Matching Production Data. 2000 *SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium*, SPE 59370, Tulsa.

Wen, X.-H., Deutsch, C.V., Cullick, A.S. (1998) A Fast Streamline-Based Method for Computing Sensitivity Coefficients for Fractional Flow Rate. *SPE Annual Meeting*, SPE 50693, New Orleans.

Willhite, G.P. (1986) *Waterflooding*. Richardson : SPE Textbook Series, Volume 3, 326 p.

Wylie, C.R., Barrett, L.C. (1987) *Advanced Engineering Mathematics*. 5. ed.  
Singapore : McGraw-Hill Book Company, 1103 p.

## Apêndice A. A equação do fluxo fracionário

O fluxo fracionário,  $f$ , de uma fase é adimensional e definido como a razão entre a vazão volumétrica da fase e a vazão total de fluxo. Para as fases óleo e água, em um deslocamento bifásico,

$$f_o = \frac{q_o}{q_t} = \frac{q_o}{q_o + q_w} \quad (\text{A-1})$$

$$f_w = \frac{q_w}{q_t} = \frac{q_w}{q_o + q_w} \quad (\text{A-2})$$

Visto que o fluxo fracionário é um balanço volumétrico,

$$f_o + f_w = 1 \quad (\text{A-3})$$

A partir da hipótese de que a Lei de Darcy pode ser aplicada a cada fase em um fluxo multifásico, definindo a função potencial  $\Phi$  como

$$\Phi = \frac{\rho}{r} + g \cdot z \quad (\text{A-4})$$

e supondo que o eixo coordenado  $x$  (direção do deslocamento) faz com o plano horizontal um ângulo de  $\theta$  graus, as equações unidimensionais para o fluxo simultâneo de óleo e de água são

$$q_o = -\frac{k_o \cdot A \cdot r_o}{m_o} \cdot \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} = -\frac{k_o \cdot A}{m_o} \cdot \left( \frac{\partial P_o}{\partial x} + r_o \cdot g \cdot \text{sen} \theta \right) = (1 - f_w) \cdot q_t \quad (\text{A-5})$$

e

$$q_w = -\frac{k_w \cdot A \cdot r_w}{m_w} \cdot \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} = -\frac{k_w \cdot A}{m_w} \cdot \left( \frac{\partial P_w}{\partial x} + r_w \cdot g \cdot \text{sen} \theta \right) = f_w \cdot q_t \quad (\text{A-6})$$

Rearranjando os termos das equações (A-5) e (A-6),

$$-(1 - f_w) \cdot \frac{q_t}{A} \cdot \frac{m_o}{k_o} = \frac{\partial P_o}{\partial x} + r_o \cdot g \cdot \text{sen} \theta \quad (\text{A-7})$$

e

$$-f_w \cdot \frac{q_t}{A} \cdot \frac{m_w}{k_w} = \frac{\partial P_w}{\partial x} + r_w \cdot g \cdot \text{sen} \theta \quad (\text{A-8})$$

Notando que

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (\text{A-9})$$

e subtraindo a equação (A-8) da (A-7), obtém-se

$$-\frac{q_t}{A} \cdot \frac{m_o}{k_o} + \frac{q_t}{A} \cdot f_w \cdot \left( \frac{m_o}{k_o} + \frac{m_w}{k_w} \right) = \frac{\partial P_c}{\partial x} + (r_o - r_w) \cdot g \cdot \text{sen}q \quad (\text{A-10})$$

Resolvendo a equação (A-10) para  $f_w$ ,

$$f_w = \frac{1}{1 + \left( \frac{k_o}{k_w} \right) \cdot \left( \frac{m_w}{m_o} \right)} + \frac{\frac{k_o \cdot A}{m_o \cdot q_t} \cdot \left[ \frac{\partial P_c}{\partial x} + (r_o - r_w) \cdot g \cdot \text{sen}q \right]}{1 + \left( \frac{k_o}{k_w} \right) \cdot \left( \frac{m_w}{m_o} \right)} \quad (\text{A-11})$$

Para deduzir a equação (A-11), assumiu-se que a lei de Darcy descrevendo o fluxo de água e de óleo e a diferença entre pressões da fase óleo e da fase água é representada pela curva de pressão capilar correspondente ao caminho de saturação de água. As forças gravitacionais são consideradas somente ao incluir o componente da velocidade que atua na direção do fluxo (direção  $x$ ).

É valioso considerar a influência dos vários termos componentes da equação (A-11). De acordo com a convenção adotada,  $q$  é o ângulo medido entre a horizontal e a linha indicativa da direção do fluxo. Portanto, o termo gravitacional  $(r_o - r_w) \cdot g \cdot \text{sen}q$  será positivo para o deslocamento do óleo na direção ascendente ( $0 < q < \pi$ ) e negativo para o deslocamento do óleo na direção descendente ( $\pi < q < 2\pi$ ). Como resultado, se todos os demais termos na equação (A-11) permanecerem os mesmos, o fluxo fracionário de água para o deslocamento ascendente do óleo é menor que para o deslocamento descendente, visto que, no primeiro caso, a gravidade tende a impedir o fluxo de água.

O efeito do termo de gradiente da pressão capilar é menos óbvio, mas pode ser qualitativamente compreendido, expressando-se o gradiente como

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \frac{dP_c}{dS_w} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (\text{A-12})$$

O primeiro termo no lado direito é a inclinação da curva de pressão capilar, Figura A-1a, e é sempre negativo. O segundo termo é a inclinação do perfil de saturação de água na direção do fluxo, um típico perfil sendo mostrado na Figura A-1b. Vê-se que  $\partial S_w / \partial x$  é também negativo. Portanto,  $\partial P_c / \partial x$  é sempre positivo e, conseqüentemente, a presença do termo de gradiente de pressão capilar tende a aumentar o fluxo fracionário de água. É difícil quantificar o gradiente de pressão capilar, pois, embora a curva de pressão capilar esteja disponível, o perfil de



saturação de água é desconhecido e é o resultado procurado nos cálculos do deslocamento.

A distribuição de saturação de água mostrada na Figura A-1b, correspondente à situação após injetar um dado volume de água, pode ser tomada como típica no deslocamento de óleo pela água. O diagrama mostra que há uma frente de fluxo distinta, ou frente de choque, onde há uma descontinuidade na saturação de água, a qual aumenta abruptamente de  $S_{wi}$  para  $S_{wf}$ , a saturação da frente. Nesta frente de choque, ambas as derivadas do lado direito da equação (A-12) têm seu máximo valor e, então,  $\partial P_c / \partial x$  é máximo. Atrás da frente, existe um crescimento gradual nas saturações de  $S_{wf}$  até um máximo de  $1 - S_{or}$ . Nesta região, é normalmente considerado que tanto  $dP_c / dS_w$  como  $\partial S_w / \partial x$  são pequenos e, portanto,  $\partial P_c / \partial x$  pode ser desprezado na equação do fluxo fracionário.

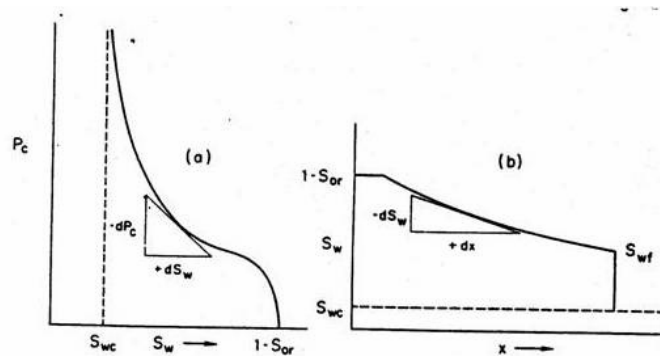


Figura A-1 - (a) Pressão capilar  
(b) Distribuição de saturação de água em função da distância

Para deslocamento em um reservatório horizontal ( $\text{sen } \theta = 0$ ) e desprezando o gradiente de pressão capilar, a equação do fluxo fracionário de água é reduzida a

$$f_w = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_o}{k_w}\right) \cdot \left(\frac{m_w}{m_o}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{k \cdot k_{ro}}{k \cdot k_{rw}}\right) \cdot \left(\frac{m_w}{m_o}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_{ro}}{k_{rw}}\right) \cdot \left(\frac{m_w}{m_o}\right)} \quad (\text{A-13})$$

Se o deslocamento de óleo ocorre a temperatura constante, então as viscosidades do óleo e da água são constantes e a equação (A-13) é estritamente uma função da saturação de água, relacionada através das permeabilidades relativas. Para um conjunto típico de permeabilidades relativas (Figura A-2), a

equação de fluxo fracionário (A-13) usualmente tem a forma indicada na Figura A-3, com limites de saturação  $S_{wi}$  e  $1-S_{or}$ , entre os quais o fluxo fracionário cresce de 0 a 1.

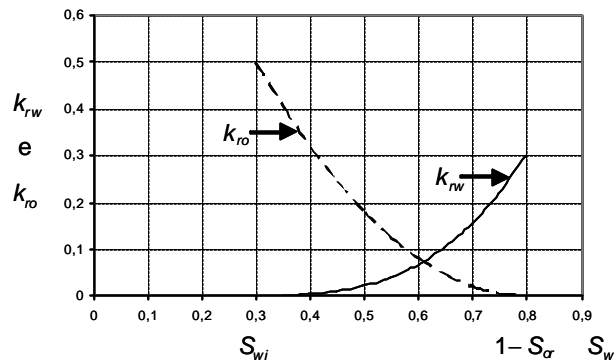


Figura A-2 - Curvas típicas de permeabilidades relativas à água e ao óleo

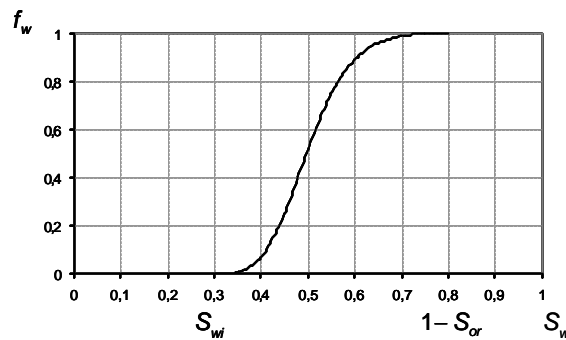


Figura A-3 - Curva típica de fluxo fracionário de água em função da saturação de água

A equação do fluxo fracionário de água, em um reservatório inclinado ( $\text{sen}\eta \neq 0$ ) e desprezando o gradiente de pressão capilar, é

$$f_w = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_o}{k_w}\right) \cdot \left(\frac{m_w}{m_o}\right)} + \frac{\frac{k_o \cdot A}{m_o \cdot q_t} \cdot (r_o - r_w) \cdot g \cdot \text{sen}\eta}{1 + \left(\frac{k_o}{k_w}\right) \cdot \left(\frac{m_w}{m_o}\right)} \quad (\text{A-14})$$

A equação do fluxo fracionário de água é usada para calcular a fração do fluxo total correspondente à água, em qualquer ponto do reservatório, assumindo que a saturação de água neste ponto é conhecida.

## Apêndice B. Solução de Buckley e Leverett para modelo 1-D

O deslocamento de um fluido por outro é um processo não permanente, pois as saturações dos fluidos variam com o tempo. Isto causa variações nas permeabilidades relativas e, também, nas pressões e nas velocidades das fases. A Figura B-1 mostra quatro estágios representativos de um deslocamento linear de óleo pela água, com saturação inicial de água conata irreduzível.

As saturações iniciais de água e de óleo são uniformes como mostrado na Figura B-1a. A injeção de água com uma vazão  $q_t$  faz com que o óleo seja deslocado do reservatório. Um gradiente abrupto de saturação de água surge, como na Figura B-1b, estabelecendo uma frente de avanço de água. A água e o óleo fluem simultaneamente na região atrás desta frente de avanço, enquanto que adiante não há nenhum fluxo de água, pois a permeabilidade relativa à água é zero. Finalmente, a água chega ao fim do reservatório, como mostrado na Figura B-1c. Este ponto é chamado de irrupção de água (“breakthrough”). Depois da irrupção da água, a fração de água no efluente aumenta à medida que o óleo remanescente é deslocado. A Figura B-1d mostra a saturação de água em um sistema linear após a irrupção da água, mais tarde em um deslocamento.

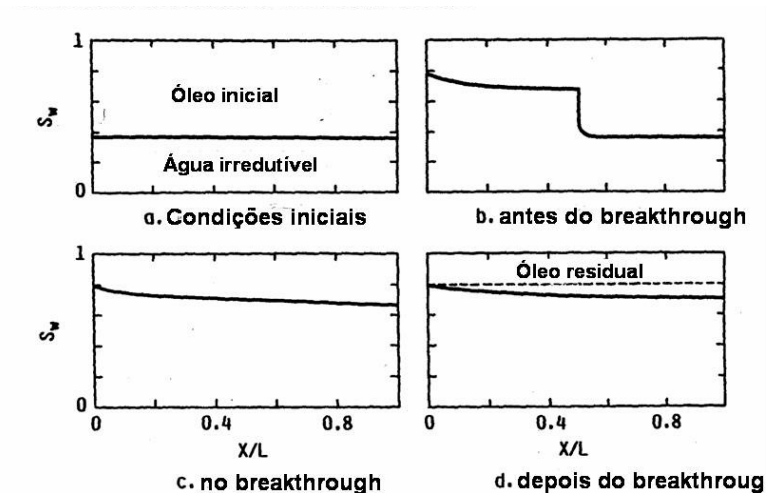


Figura B-1 - Distribuições de saturação de água durante diferentes estágios de um deslocamento de óleo pela água

Assume-se que o deslocamento do óleo se dá sob a condição de fluxo difuso. Isto significa que as saturações de fluido em qualquer ponto em um deslocamento

linear são uniformemente distribuídas com respeito à espessura do reservatório. A única razão desta suposição é que a mesma permite descrever matematicamente o deslocamento em uma dimensão, fornecendo o modelo mais simples de deslocamento. Desde que a saturação de água é uniformemente distribuída, também o são as permeabilidades relativas ao óleo e à água, funções da saturação de água em qualquer ponto.

A condição de fluxo difuso pode ser encontrada sob duas condições físicas extremas:

- a) quando o deslocamento ocorre com vazões de injeção muito altas, de forma que a condição de equilíbrio vertical não é satisfeita e os efeitos das forças capilar e gravitacional são desprezíveis;
- b) para deslocamento com vazões de injeção baixas em reservatórios onde a zona de transição medida excede bastante a espessura do reservatório e a condição de equilíbrio vertical é satisfeita.

O modelo de Buckley e Leverett, ou do avanço frontal, é reconhecido como a equação básica para descrever o deslocamento imiscível em uma dimensão. Para água deslocando óleo, a equação determina a velocidade com que um plano de saturação constante de água avança através de um sistema linear.

O modelo foi desenvolvido pela aplicação da lei de conservação de massa ao fluxo de dois fluidos (óleo e água) em uma direção (direção  $x$ ). Quando o óleo é deslocado pela água em um sistema linear, a lei de conservação de massa para a fase óleo e para a fase água pode ser escrita como

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_o \cdot u_o) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_o \cdot S_o \cdot \mathbf{f}) \quad (\text{B-1})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_w \cdot u_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_w \cdot S_w \cdot \mathbf{f}) \quad (\text{B-2})$$

As equações (B-1) e (B-2) podem ser escritas em termos das vazões volumétricas  $q_o$  e  $q_w$  multiplicando-se ambos os lados das equações pela área transversal  $A$  aberta ao fluxo. Assim

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_o \cdot q_o) = A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_o \cdot S_o \cdot \mathbf{f}) \quad (\text{B-3})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_w \cdot q_w) = A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_w \cdot S_w \cdot \mathbf{f}) \quad (\text{B-4})$$

No modelo de Buckley e Leverett, água e óleo são considerados incompressíveis e, então,  $r_o$  e  $r_w$  são constantes. A porosidade  $f$  também é constante. Assim, as equações (B-3) e (B-4) transformam-se em

$$-\frac{\partial q_o}{\partial x} = A.f \frac{\partial S_o}{\partial t} \quad (\text{B-5})$$

$$-\frac{\partial q_w}{\partial x} = A.f \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (\text{B-6})$$

A soma das equações (B-5) e (B-6) resulta em

$$-\frac{\partial(q_o + q_w)}{\partial x} = A.f \frac{\partial(S_o + S_w)}{\partial t} \quad (\text{B-7})$$

$$\text{Mas, } S_o + S_w = 1, \quad (\text{B-8})$$

então

$$-\frac{\partial(q_o + q_w)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B-9})$$

$$\text{ou } q_o + q_w = q_t(t). \quad (\text{B-10})$$

As vazões  $q_o$  e  $q_w$  variam com a distância  $x$ . Entretanto, como o óleo e a água foram considerados incompressíveis, a vazão volumétrica total  $q_t$  em qualquer tempo  $t$  é constante para toda posição  $x$  no sistema linear. A equação (B-6) é usada para continuar o desenvolvimento do modelo de Buckley e Leverett.

Substituindo (A-2) em (B-6), obtém-se

$$-\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{f.A}{q_t} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (\text{B-11})$$

Para obter uma solução para a equação (B-11), é necessário obter uma forma equivalente da equação (B-11), que envolva uma variável dependente (ou  $f_w$  ou  $S_w$ ). No modelo de Buckley e Leverett, uma expressão para  $\partial S_w / \partial t$  é obtida aplicando a regra da cadeia para diferenciação.

A dedução começa observando-se que a saturação de água no meio poroso é uma função de duas variáveis independentes,  $x$  e  $t$ . Assim, pode-se escrever  $S_w = S_w(x, t)$  ou

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} \cdot dt \quad (\text{B-12})$$

Desde que a intenção é estudar o movimento de um plano de saturação de água constante, isto é,  $dS_w = 0$ , então

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = -\frac{\frac{\partial S_w}{\partial t}}{\frac{\partial S_w}{\partial x}} \quad (\text{B-13})$$

O termo  $(dx/dt)_{S_w}$  é a velocidade com a qual a saturação  $S_w$  move-se através do meio poroso. Mais tarde, a equação (B-13) será usada para eliminar  $\partial S_w/\partial t$  da equação (B-11).

Quando o fluxo fracionário de água é assumido ser somente uma função da saturação de água,  $f_w = f_w(S_w)$ , aplicando a regra da cadeia para diferenciação,

$$\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (\text{B-14})$$

Substituindo as equações (B-13) e (B-14) na equação (B-11), obtém-se

$$-\frac{\partial f_w}{\partial S_w} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\frac{f \cdot A}{q_t} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} \quad (\text{B-15})$$

ou

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = \frac{q_t}{f \cdot A} \cdot \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (\text{B-16})$$

A equação (B-16) é a equação de Buckley e Leverett (também chamada de equação do avanço frontal), a qual assegura que em um processo de deslocamento linear, cada saturação de água move-se através do meio poroso com uma velocidade computada a partir da derivada do fluxo fracionário em relação à saturação de água avaliada nesta saturação de água. Três suposições foram feitas no desenvolvimento da equação (B-16) : (1) fluxo incompressível, (2) que o fluxo fracionário de água é uma função apenas da saturação de água e (3) que não há transferência de massa entre as fases.

A posição  $x_{S_w}$  de qualquer saturação  $S_w$  pode ser obtida integrando a equação (B-16) para o tempo total, desde o início da injeção, a saber

$$\int_0^{x_{S_w}} dx_{S_w} = \frac{q_t}{A \cdot f} \cdot \int_0^t \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \cdot dt. \quad (\text{B-17})$$

Quando  $\partial f_w/\partial S_w$  é somente uma função de  $S_w$ , ou seja, o termo de gradiente de pressão capilar é desprezível, a equação (B-17) pode ser integrada diretamente para obter

$$x_{S_w} = \frac{q_t \cdot t}{A \cdot f} \cdot \left( \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right)_{S_w} \quad (\text{B-18})$$

Portanto, para um dado tempo depois do início da injeção, as posições dos diferentes planos de saturação de água podem ser encontradas, usando a equação (B-18), simplesmente determinando a inclinação da curva de fluxo fracionário para o valor particular de cada saturação, desde que  $x_{S_w}$  seja menor que ou igual ao comprimento do meio poroso.

A princípio, a derivada do fluxo fracionário em relação à  $S_w$  pode ser obtida derivando a equação (A-11), onde as permeabilidades das fases óleo e água são claramente funções da saturação de água. O termo que é difícil avaliar é  $\partial P_c / \partial x$ . Quando  $\partial P_c / \partial x = 0$  ou quando  $q_t$  é grande,  $f_w$  pode ser computado diretamente a partir dos dados de permeabilidade relativa. Entretanto, essas suposições são válidas apenas para uma porção do intervalo de saturação de água.

Existe uma dificuldade matemática na aplicação desta técnica que pode ser vislumbrada considerando a curva de fluxo fracionário típica mostrada na Figura A-3 em conjunto com a equação (B-18). Visto que há freqüentemente um ponto de inflexão na curva de fluxo fracionário, então o gráfico de  $df_w/dS_w$  versus  $S_w$  terá um ponto de máximo, como mostrado na Figura B-2a.

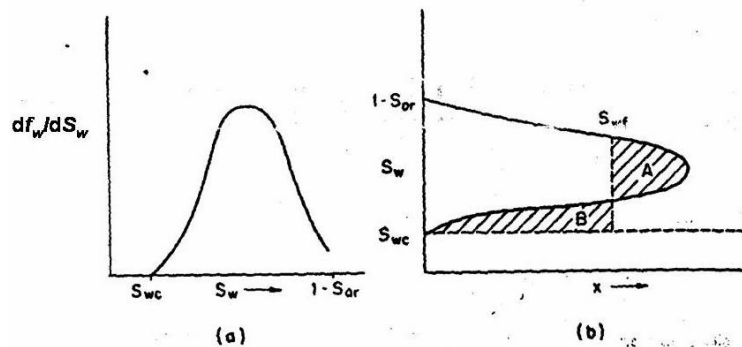


Figura B-2 - (a) Derivada de uma típica curva de fluxo fracionário  
(b) Distribuição de saturação de água resultante em deslocamento de óleo pela água

Usando a equação (B-18) para representar graficamente a distribuição de saturação em um tempo particular resultará, portanto, na linha sólida mostrada na

Figura B-2b. O perfil de saturação obtido é impossível de ocorrer fisicamente, já que indica que saturações de água diferentes podem coexistir em um dado ponto do reservatório. O que ocorre é que os valores intermediários de saturação de água, mostrados na Figura B-2a como tendo a máxima velocidade, inicialmente tendem a ultrapassar as saturações menores resultando na formação de uma descontinuidade de saturação ou frente de choque. Por causa desta descontinuidade, a aproximação matemática de Buckley e Leverett, que assume que  $S_w$  é contínua e diferenciável, será inapropriada para descrever a situação na frente. Atrás da frente, contudo, no intervalo de saturação  $S_{wf} < S_w < 1 - S_{or}$ , onde  $S_{wf}$  é saturação da frente de choque, a equação (B-18) pode ser aplicada para determinar a velocidade e a posição da saturação de água. Além disso, neste intervalo de saturação, o gradiente de pressão capilar é usualmente negligenciável e a equação de fluxo fracionário a ser usada nas equações (B-16) e (B-18) é a equação (A-13), se o reservatório for horizontal, ou a equação (A-14), se o reservatório for inclinado.

Para traçar o perfil de saturação de água correto, usando a técnica de Buckley e Leverett, requer-se a determinação da linha vertical tracejada, mostrada na Figura B-2b, de forma que as áreas hachuradas A e B são iguais. A linha tracejada representa descontinuidade de saturação na frente de choque. Um método mais elegante para alcançar o mesmo resultado foi apresentado por Welge em 1952.

Uma outra abordagem para o problema pode ser dada.

Rearranjando a equação (A-11), obtém-se

$$f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{A} \cdot \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0 \quad (\text{B-19})$$

Sabendo que

$$q_t/A = U(t) = u_o + u_w, \quad (\text{B-20})$$

velocidade total de fluxo, tem-se

$$f \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} + U(t) \cdot \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0 \quad (\text{B-21})$$

Definindo as variáveis adimensionais

$$X = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{f \cdot L} \cdot \int_0^t U(t) \cdot dt \quad (\text{B-22})$$

e substituindo-as na equação (B-21), chega-se a

$$\frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial X} = 0 \quad (\text{B-23})$$



As condições inicial e de contorno do problema são

$$\begin{cases} T = 0 : S = S_{wi} \\ X = 0 : f_w(S_w) = 1 \end{cases} \quad (\text{B-24})$$

A equação (B-23) pode ser escrita como

$$\frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{df_w(S_w)}{dS_w} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial X} = 0 \quad (\text{B-25})$$

Este problema apresenta solução auto-similar. A solução  $S_w(X, T)$  depende de uma variável  $X/T$ , ou seja,  $S_w(X, T) = S_w\left(\frac{X}{T}\right) = S_w(e)$ ,

$$\text{onde } e = \frac{X}{T}. \quad (\text{B-26})$$

As condições inicial e de contorno, apresentadas nas equações (B-24), transformam-se em

$$\begin{cases} e \rightarrow \infty : S = S_{wi} \\ e = 0 : f_w(S_w) = 1 \end{cases} \quad (\text{B-27})$$

Substituindo a expressão (B-26) na equação (B-23), obtém-se

$$\frac{\partial S_w(e)}{\partial T} = \frac{dS_w(e)}{de} \cdot \frac{\partial e}{\partial T} = -\frac{X}{T^2} \cdot \frac{dS_w(e)}{de} \quad (\text{B-28})$$

$$\frac{\partial f_w(S_w(e))}{\partial X} = \frac{df_w(S_w(e))}{de} \cdot \frac{\partial e}{\partial X} = \frac{1}{T} \cdot \frac{df_w(S_w(e))}{de}, \quad (\text{B-29})$$

então

$$\frac{\partial S_w(e)}{\partial T} + \frac{\partial f_w(S_w(e))}{\partial X} = -\frac{X}{T^2} \cdot \frac{dS_w(e)}{de} + \frac{1}{T} \cdot \frac{df_w(S_w(e))}{de} = 0 \quad (\text{B-30})$$

$$-e \cdot \frac{dS_w(e)}{de} + \frac{df_w(S_w(e))}{de} = 0, \quad (\text{B-31})$$

mas

$$\frac{df_w(S_w(e))}{de} = \frac{df_w(S_w(e))}{dS_w} \cdot \frac{dS_w(e)}{de} = f'_w(S_w) \cdot \frac{dS_w(e)}{de}, \quad (\text{B-32})$$

logo

$$-e \cdot \frac{dS_w(e)}{de} + \frac{df_w(S_w(e))}{de} = (-e + f'_w(S_w)) \cdot \frac{dS_w(e)}{de} = 0. \quad (\text{B-33})$$

Existem dois tipos de soluções contínuas para a equação (B-33), a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_w(e)}{de} = 0 \longrightarrow S_w(e) = \text{constante} \\ e = f'_w(S_w) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valor constante} \\ \text{onda rarefeita} \end{array} \quad (\text{B-34})$$

A variável auto-similar  $e = \frac{X}{T}$ , adimensional, pode ser vista como a velocidade de propagação da saturação  $S_w$ .

As condições inicial e de contorno, dadas pelas equações (B-27) podem não ser satisfeitas pelas soluções contínuas (equações (B-34)), se  $e = f'_w(S_w)$  não aumentar continuamente ao longo do caminho de deslocamento. Portanto, introduz-se o conceito de ondas de choque, respeitando as condições de balanço de massa.

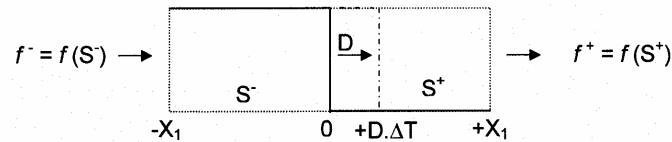


Figura B-3 - Ondas de choque

Considerando o balanço de massa para a fase água (assumida incompressível),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{massa} \\ \text{que} \\ \text{entra} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{massa} \\ \text{que} \\ \text{sai} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{massa} \\ \text{que} \\ \text{acumula} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} f_w^- \cdot \Delta T - f_w^+ \cdot \Delta T &= \int_{-X_1}^{+X_1} (S_w(X, T + \Delta T) - S_w(X, T)) \cdot dX = \\ &= \int_{-X_1}^{+D\Delta T} S_w^- \cdot dX + \int_{+D\Delta T}^{+X_1} S_w^+ \cdot dX - \int_{-X_1}^0 S_w^- \cdot dX - \int_0^{+X_1} S_w^+ \cdot dX \end{aligned} \quad (\text{B-35})$$

$$(f_w^- - f_w^+) \cdot \Delta T = S_w^- \cdot (D \cdot \Delta T + X_1) + S_w^+ \cdot (X_1 - D \cdot \Delta T) - S_w^- \cdot X_1 - S_w^+ \cdot X_1 \quad (\text{B-36})$$

$$(f_w^- - f_w^+) \cdot \Delta T = (S_w^- - S_w^+) \cdot D \cdot \Delta T \quad (\text{B-37})$$

então

$$D = \frac{f_w^- - f_w^+}{S_w^- - S_w^+} = \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-} \quad (\text{B-38})$$

é a velocidade de deslocamento da onda de choque.

Várias soluções  $S_w(X/T)$  do problema definido pelas equações (B-23) e (B-24), contemplando ondas de choque que obedecem à condição de balanço de materiais (equação (B-38)), podem ser construídas. Portanto, para garantir a unicidade da solução do problema unidimensional de deslocamento de óleo pela água, apresentam-se as condições para a estabilidade da onda de choque, em uma formulação linear

$$f'_w(S_w^+) \leq D \leq f'_w(S_w^-) \quad (\text{B-39})$$

e em uma formulação não-linear

$$\forall S_w \in [S_w^+, S_w^-]: \frac{f_w(S_w) - f_w^-}{S_w - S_w^-} \geq D \quad (\text{B-40})$$

A condição definida pela equação (B-40) significa que, além da condição definida pela equação (B-39), é necessário proibir o caso em que a linha unindo  $(S_w^-, f_w^-)$  e  $(S_w^+, f_w^+)$  cruze a curva  $f_w = f_w(S_w)$ .

Desta forma, a solução única  $S_w(X/T)$  procurada, considerando ondas de choque estáveis (Figura B-4), é

$$\left\{ \begin{array}{l} S_w = 1 - S_{or}, \quad 0 < e < f'_w(1 - S_{or}) \\ e = f'_w(S_w), \quad f'_w(1 - S_{or}) < e < D = \frac{f_w(S_{wf}) - f_w(S_{wi})}{S_{wf} - S_{wi}} \\ S = S_{wi}, \quad D = f'_w(S_{wf}) < e < \infty \end{array} \right. \quad (\text{B-41})$$

Cada saturação propaga-se a uma velocidade  $f'_w(S_w)$ .

Uma outra maneira de solucionar o problema definido pelas equações (B-23) e (B-24) é aplicar o método das características ao mesmo.

Supõe-se que  $S_w = S_w(X, T)$  e  $X = X(T)$ . Daí,

$$\frac{dS_w(X(T), T)}{dT} = \frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{\partial S_w}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dT} \quad (\text{B-42})$$

$$S_w = \text{constante} \longrightarrow \frac{dS_w}{dT} = 0 \longrightarrow \frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{\partial S_w}{\partial X} \cdot \frac{dX}{dT} = 0 \quad (\text{B-43})$$

Comparando as equações (B-25) e (B-43), vê-se que, para cada  $S_w$  constante,  $\frac{dX}{dT} = f'_w(S_w)$ . Deve-se lembrar da possibilidade de existência de ondas de choque, incorporando-a à solução (Figura B-5).

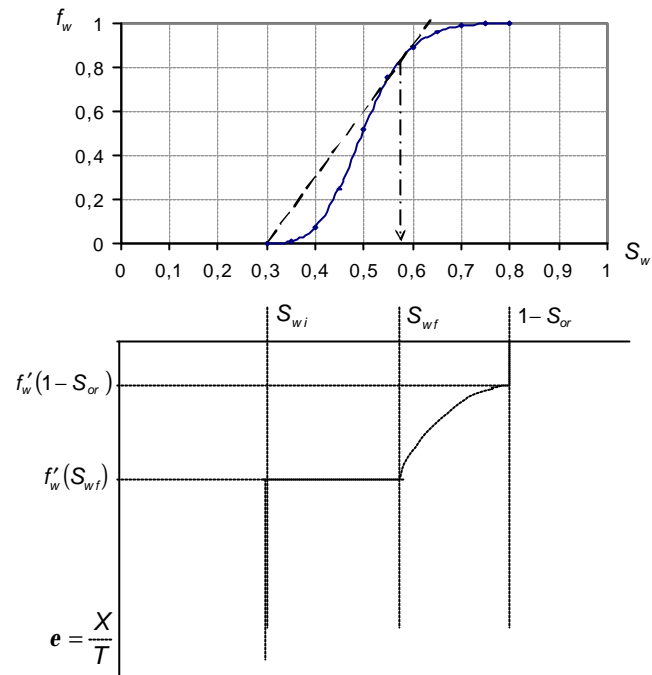


Figura B-4 - Perfil de saturação de água computada a partir da solução auto-similar da equação de Buckley e Leverett

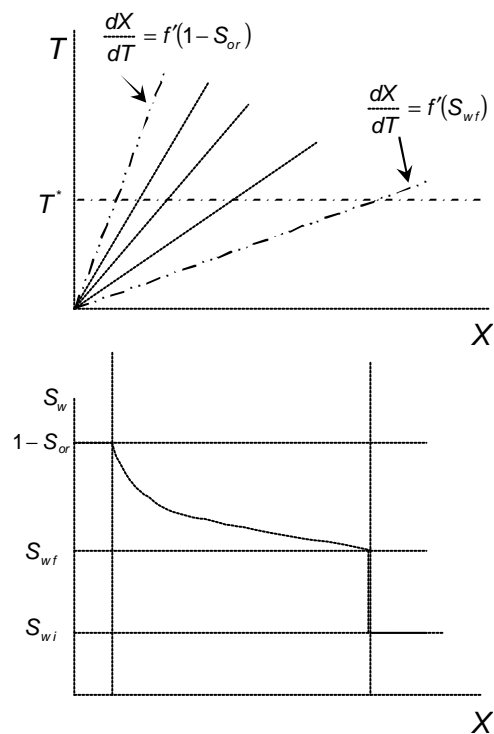


Figura B-5 - Perfil de saturação de água, para cada  $T^*$ , computada a partir da solução pelo método das características da equação de Buckley e Leverett

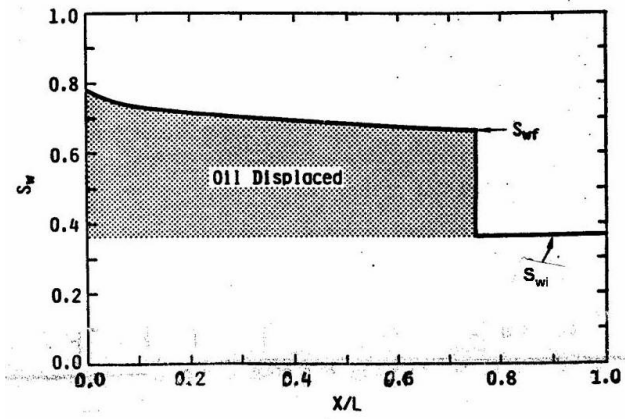


Figura B-6 - Perfil de saturação de água computada a partir da solução da equação de Buckley e Leverett

Apêndice C. Problemas inversos para modelo 1-D de injeção de água : métodos de Welge e de JBN.

O método de Welge consiste em integrar a distribuição de saturação sobre a distância do ponto de injeção até a frente, obtendo-se, assim, a saturação de água média  $\bar{S}_w$  atrás da frente, como mostrado na Figura C-1.

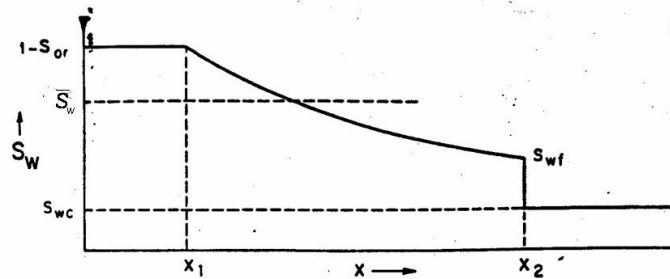


Figura C-1 - Distribuição da saturação de água em função da distância, antes do breakthrough no poço produtor

Em um certo tempo, correspondente a um volume de água injetada  $W_i$  e antes da irrupção de água no poço produtor, a saturação máxima de água,  $S_w = 1 - S_{or}$ , moveu-se uma distância  $x_1$ , sua velocidade sendo proporcional à inclinação da curva de fluxo fracionário avaliada na saturação máxima, a qual é pequena, mas finita, como mostrada nas Figuras A-3 e B-2a. A saturação da frente  $S_{wf}$  está localizada na posição  $x_2$  medida a partir do ponto de injeção. Aplicando um simples balanço de massa

$$W_i = x_2 \cdot A \cdot f \cdot (\bar{S}_w - S_{wi}) \quad (C-1)$$

ou

$$\bar{S}_w - S_{wi} = \frac{W_i}{x_2 \cdot A \cdot f} \quad (C-2)$$

e, usando a equação (B-18), que é aplicável até à frente de avanço em  $x_2$ , então

$$\bar{S}_w - S_{wi} = \frac{W_i}{x_2 \cdot A \cdot f} = \frac{1}{\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wf}}} \quad (C-3)$$

Uma expressão para a saturação média de água atrás da frente pode ser obtida pela integração direta do perfil de saturação como

$$\bar{S}_w = \frac{(1 - S_{or}) \cdot x_1 + \int_{x_1}^{x_2} S_w dx}{x_2} \quad (C-4)$$

e como, a partir da equação (B-18),

$$x_{S_w} \propto \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_w} \quad (C-5)$$

para um dado volume de água injetada e para  $S_w = S_{wf}$ , então a equação (C-4) pode ser expressa como

$$\bar{S}_w = \frac{(1 - S_{or}) \cdot \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{1-S_{or}} + \int_{1-S_{or}}^{S_{wf}} S_w \cdot d \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)}{\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wf}}} \quad (C-6)$$

A integral no numerador desta equação pode ser avaliada usando o método de integração por partes, isto é,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (C-7)$$

para chegar a

$$\int_{1-S_{or}}^{S_{wf}} S_w \cdot d \left( \frac{df_w}{dS_w} \right) = \left[ S_w \cdot \frac{df_w}{dS_w} \right]_{1-S_{or}}^{S_{wf}} - \left[ f_w \right]_{1-S_{or}}^{S_{wf}} \quad (C-8)$$

e substituindo na equação (C-6) e cancelando os termos, tem-se

$$\bar{S}_w = S_{wf} + \frac{1 - (f_w)_{S_{wf}}}{\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wf}}} \quad (C-9)$$

na qual, tanto  $f_w$  como a sua derivada são avaliadas na saturação da frente de choque  $S_{wf}$ . Finalmente, as equações (C-3) e (C-9) levam a

$$\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wf}} = \frac{1 - (f_w)_{S_{wf}}}{\bar{S}_w - S_{wf}} = \frac{1}{\bar{S}_w - S_{wi}} \quad (C-10)$$

A importância deste resultado é ilustrada na Figura C-2.

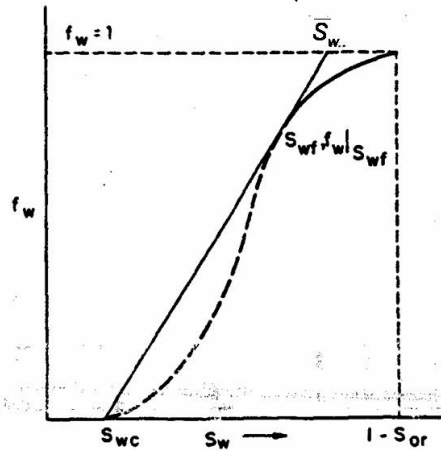


Figura C-2 - Determinação de  $S_{wf}$  e  $\bar{S}_w$

Para satisfazer a equação (C-10), a tangente à curva de fluxo fracionário, a partir do ponto  $S_w = S_{wi}; f_w = 0$ , tem de ter um ponto de tangência com coordenadas  $S_w = S_{wf}; f_w = (f_w)_{S_{wf}}$ , e a extrapolação da tangente tem de interceptar a linha  $f_w = 1$  no ponto  $S_w = \bar{S}; f_w = 1$ .

Este método de determinação de  $S_{wf}$ ,  $(f_w)_{S_{wf}}$  e  $\bar{S}_w$  requer a curva de fluxo fracionário representada graficamente, usando ou a equação (A-13) ou a (A-14), para todo intervalo de saturação de água  $S_{wi} < S_w < 1 - S_{or}$ . Como notado previamente, o uso de qualquer destas equações ignora o efeito do gradiente de pressão capilar,  $\partial P_c / \partial x$ . Isto, entretanto, só é admissível atrás da frente de avanço para  $S_{wf} < S_w < 1 - S_{or}$ . O trecho da curva de fluxo fracionário para saturações menores que  $S_{wf}$  é, portanto, virtual e o primeiro ponto real da curva tem as coordenadas  $S_{wf}; (f_w)_{S_{wf}}$ , correspondente à frente de choque. Esta simples técnica gráfica de Welge tem uma aplicação muito maior nos cálculos de recuperação de óleo.

O método de Welge, além de permitir a determinação da saturação média de água na região lavada  $\bar{S}_w$ , permite o cálculo da função de fluxo fracionário  $f_w(S_w)$ .

Conhece-se a evolução do  $BSW$  ao longo do tempo no poço produtor, ou, de outra forma, a curva  $f_w(1, T) \times T$ .

Integrando ambos os lados da equação (B-23),

$$\iint \left( \frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial X} \right) \cdot dX \cdot dT = 0 \quad (C-11)$$



Aplicando o Teorema de Green à equação (C-11),

$$\iint \left( \frac{\partial S_w}{\partial T} + \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial X} \right) \cdot dX \cdot dT = \oint (S_w \cdot dX - f_w \cdot dT) = 0 \quad (\text{C-12})$$

Aplicando a equação (C-12) à área do triângulo (Figura C-3) definido por  $(0,0) \rightarrow (1,T) \rightarrow (1,0) \rightarrow (0,0)$ ,

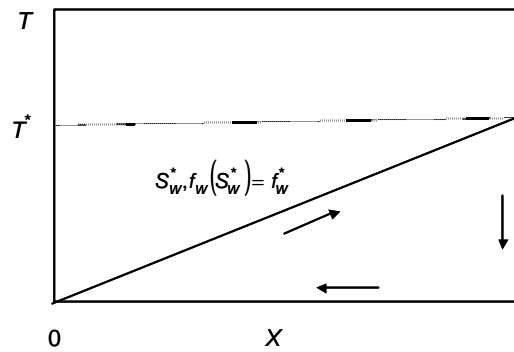


Figura C-3 - Obtenção da saturação  $S_w$  correspondente a cada  $f_w(1,T)$  conhecido

$$\oint (S_w \cdot dX - f_w \cdot dT) = (S_w^* - f_w^* \cdot T^*) - \int_{T^*}^0 f_w(1,T) \cdot dT + \int_1^0 S_{wi} \cdot dX = 0 \quad (\text{C-13})$$

$$S_w^* - f_w^* \cdot T^* + \int_0^{T^*} f_w(1,T) \cdot dT - S_{wi} = 0 \quad (\text{C-14})$$

$$S_w^* = S_{wi} + f_w^* \cdot T^* - \int_0^{T^*} f_w(1,T) \cdot dT \quad (\text{C-15})$$

Com a equação (C-15), obtém-se a saturação  $S_w$  correspondente a cada  $f_w(1,T)$  conhecido.

Aplicando a equação (C-12) à área do triângulo (Figura C-4) definido por  $(0,0) \rightarrow (1,T) \rightarrow (T,0) \rightarrow (0,0)$ ,

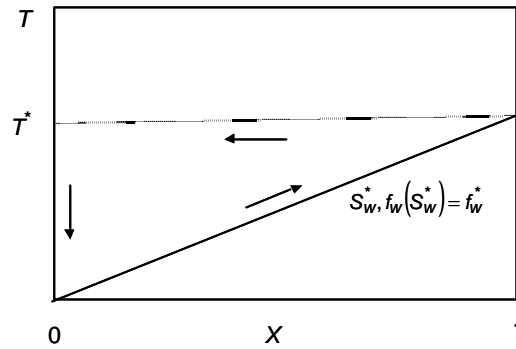


Figura C-4 - Obtenção da saturação média de água entre  $X = 0$  e  $X = 1$  correspondente a cada  $T$

$$\oint (S_w \cdot dX - f_w \cdot dT) = (S_w^* - f_w^* \cdot T^*) + \int_0^1 S_w(X, T^*) \cdot dX - \int_{T^*}^0 f_w(0, T) \cdot dT = 0 \quad (\text{C-16})$$

Substituindo a condição de contorno, expressa por uma das equações (B-24),

$$S_w^* - f_w^* \cdot T^* - \int_0^1 S_w(X, T^*) \cdot dX + T^* = 0 \quad (\text{C-17})$$

mas, a saturação média de água entre  $X = 0$  e  $X = 1$  é

$$\bar{S}_w(T^*) = \int_0^1 S_w(X, T^*) \cdot dX. \quad (\text{C-18})$$

Logo,

$$\bar{S}_w(T^*) = S_w^* - f_w^* \cdot T^* + T^* \quad (\text{C-19})$$

Johnson, Bossler e Naumann (JBN) desenvolveram um método de determinação das permeabilidades relativas à água e ao óleo a partir da análise da evolução do deslocamento do óleo pela água. O método JBN gera curvas de permeabilidade relativa equivalentes às do método de Jones e Roszelle, mas a permeabilidade base é a permeabilidade ao óleo na saturação de água irreduzível.

A partir da lei de Darcy, desprezados a pressão capilar e os efeitos gravitacionais,

$$U(T) = -k \cdot \left( \frac{k_{rw}(S_w)}{m_w} + \frac{k_{ro}(S_w)}{m_o} \right) \cdot \frac{\partial P(x, T)}{\partial x} = -k \cdot I(S_w) \cdot \frac{\partial P(x, T)}{\partial x} \quad (\text{C-20})$$

$$U(T) = -\frac{k}{L} \cdot I(S_w) \cdot \frac{\partial P(X, T)}{\partial X}, \quad (\text{C-21})$$

onde  $X$  e  $T$  são as variáveis adimensionais definidas segundo as equações (B-22) e  $L$  a distância entre os pontos de injeção e de produção.

Integrando a equação (C-21) do ponto de injeção ( $X = 0$ ) ao ponto de produção ( $X = 1$ ), sabendo que  $\Delta P(1, T) = P_{inj} - P_{prod}$ , chega-se a

$$\Delta P(1, T) = \int_0^1 -\frac{\partial P}{\partial X} \cdot dX = \frac{U(T) \cdot L}{k} \cdot \int_0^1 \frac{1}{I(S_w(X, T))} \cdot dX. \quad (C-22)$$

O método JBN é baseado na solução de Buckley e Leverett, a qual é auto-similar, ou seja,  $S_w(X, T) = S_w\left(\frac{X}{T}\right) = S_w(e)$ . Então,

$$\Delta P(1, T) = \frac{U(T) \cdot L}{k} \cdot T \cdot \int_0^{1/T} \frac{de}{I(S_w(e))}. \quad (C-23)$$

Calculando a inversa da equação (C-23), tem-se que

$$\frac{1}{I(S_w)} = \frac{k}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\Delta P(1, T)}{U(T) \cdot T} \right). \quad (C-24)$$

Definindo

$$w = \frac{1}{T} = \frac{e}{X} \quad (C-25)$$

e considerando o ponto de produção ( $X = 1$ ), tem-se  $dw = de$ .

Logo, a equação (C-24), transforma-se em

$$\frac{1}{I(S_w)} = \frac{k}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\Delta P(1, T)}{U(T) \cdot T} \right). \quad (C-26)$$

Conhecido o fluxo fracionário de água (equação (A-13))

$$f_w(S_w) = \frac{k_{rw}(S_w)/m_w}{I(S_w)} \quad (C-27)$$

na face de saída do testemunho ( $X = 1$ ) e usando a equação (C-26), então se calculam as permeabilidades relativas através de

$$k_{rw}(S_w) = m_w \cdot I(S_w) \cdot f_w(S_w) \quad (C-28)$$

$$k_{ro}(S_w) = m_o \cdot I(S_w) \cdot (1 - f_w(S_w)) \quad (C-29)$$