

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO SEMI-NUMÉRICO DE  
CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA INFINITA UTILIZANDO FUNÇÕES DE  
GREEN PARA POÇOS HORIZONTAIS E INCLINADOS

**WESLEY DA SILVA BARRETO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE - UENF  
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO - LENEP

MACAÉ - RJ  
MARÇO - 1998

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO SEMI-NUMÉRICO DE  
CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA INFINITA UTILIZANDO FUNÇÕES DE  
GREEN PARA POÇOS HORIZONTAIS E INCLINADOS

**WESLEY DA SILVA BARRETO**

“Tese submetida ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia de Reservatório e de Exploração de Petróleo”.

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Nascimento Amado

MACAÉ - RJ  
MARÇO - 1998

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO SEMI-NUMÉRICO DE  
CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA INFINITA UTILIZANDO FUNÇÕES DE  
GREEN PARA POÇOS HORIZONTAIS E INCLINADOS

**WESLEY DA SILVA BARRETO**

“Tese submetida ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia de Reservatório e de Exploração de Petróleo”.

Aprovada em 9 de março de 1998.

Comissão Examinadora:

---

César Luiz Palagi (Ph.D., Simulação Numérica) - PETROBRAS

---

Rogério Ferreira Paiva (Ph.D., Petrofísica, Tomografia-X) - UENF-CCT-LENEP

---

Viatcheslav I. Priimenko (Ph.D., Matemática Aplicada) - UENF-CCT-LENEP

---

Luís Carlos Nascimento Amado (Ph.D., Engenharia de Reservatório) - W-GRT-Schlumberger

Orientador

## Dedicatória

Dedico este trabalho as pessoas mais importantes da minha vida, sentido maior da minha existência:

À Deus, Pai Eterno e supremo Criador;

Aos meus pais, Aloísio Barreto e Raulina, e irmãs, Rosilane e Raquel, pelo apoio e incentivo aos estudos;

A minha esposa Marise pelo apoio e compreensão constantes;

Aos meus amigos pelo companheirismo.

## **Agradecimentos**

A Fundação Estadual Norte Fluminense pelo apoio financeiro;

Aos meus Orientadores: Prof. Amado e Priimenko pelo tempo e dedicação dispensados em me orientar neste trabalho;

A meu amigo Luís Braga pelo empenho em me ajudar em todas as etapas do trabalho e fora do trabalho;

A chefia e aos professores do Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo pela minha formação acadêmica;

Aos funcionários administrativos pela prontidão e carinho que sempre me dispensou;

Aos meus colegas pós-graduandos e graduandos pela amizade .

# Sumário

<b>Índice de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xiv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Etapas de Trabalho . . . . .	4
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Fundamentos Conceituais . . . . .	5
2.1.1 Equações de Fluxo . . . . .	5
2.2 Regimes de Fluxo . . . . .	10
2.2.1 Fluxo em Poços Verticais . . . . .	10
2.2.2 Fluxo em Poços Horizontais . . . . .	11
2.3 Modelo de Fonte . . . . .	14
2.4 Modelo Físico-Matemático . . . . .	17

<b>3</b>	<b>Funções de Green</b>	<b>19</b>
3.1	Fórmulas de Green . . . . .	19
3.2	Funções de Green Aplicada a Equação da Difusividade(Caso Isotrópico) . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Reservatório Cilíndrico</b>	<b>22</b>
4.1	Reservatório Cilíndrico Infinito . . . . .	22
4.1.1	Derivação das Equações de Pressão . . . . .	23
4.1.2	Derivação das Equações de Fluxo . . . . .	25
4.1.3	Cálculo da Integral . . . . .	27
4.1.4	Modelagem no Tempo . . . . .	34
4.1.5	Resultados . . . . .	36
4.2	Reservatório Cilíndrico Selado . . . . .	44
4.2.1	Derivação das Equações de Pressão . . . . .	44
4.2.2	Derivação das Equações de Fluxo . . . . .	48
4.2.3	Resultados . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Reservatório 3D</b>	<b>51</b>
5.1	Funções Fonte e Funções de Green Instantâneas . . . . .	52
5.2	Fontes Fluxo Uniforme . . . . .	53
5.3	Método de Newman . . . . .	53
5.4	Fontes Instantâneas Básicas . . . . .	54
5.5	Algumas Funções Fluxo Uniforme . . . . .	55
5.6	Modelo Fonte Condutividade Infinita . . . . .	55
5.7	Modelos Analíticos Existentes . . . . .	58
5.8	Modelo Fonte Fluxo Uniforme . . . . .	59
5.9	Resultados . . . . .	59

<b>6 Conclusões e Recomendações</b>	<b>63</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>
<b>Apêndices</b>	<b>69</b>
<b>A Funções de Green</b>	<b>70</b>
A.1 Fórmulas de Green . . . . .	70
<b>B Funções de Green para Reservatório Cilíndrico Infinito</b>	<b>72</b>
<b>C Funções de Green para Reservatório Cilíndrico Selado</b>	<b>74</b>
<b>D Cálculo das Raízes</b>	<b>78</b>



# Índice de Figuras

1	Índices de Produtividade ( <b>IP = PIF</b> ) . . . . .	2
2	<b>IP(s)</b> dos Poços Convencionais( <i>Conventional</i> ), Horizontais( <i>Heavy Oil</i> ) e Fraturados( <i>Fractured</i> ) . . . . .	3
3	Fluxo Radial Inicial . . . . .	11
4	Fluxo Linear Inicial . . . . .	12
5	Fluxo Pseudoradial . . . . .	12
6	Fluxo Linear Tardio . . . . .	13
7	Modelo de Reservatório tipo Bloco Fechado . . . . .	13
8	Regimes de Fluxo Presentes para Poços Horizontais . . . . .	14
9	Regimes de Fluxo Presentes para Poços Horizontais . . . . .	14
10	Pressão no Regime Pseudo-Permanente para Modelo Fluxo Uniforme ao Longo do Poço . . . . .	15
11	Fluxo no Poço com Pressão Constante para Diferentes Tempos . . . . .	15
12	Convergência da Função . . . . .	28
13	Função Após Mudança de Variável . . . . .	29
14	Limites da Integral x $t_d$ . . . . .	29
15	Limites da Integral x $t_d$ . . . . .	30
16	Evolução da Integral com a Variação do Número de Termos da Quadratura . . . . .	31
17	Evolução da Integral com a Variação do Limite Superior . . . . .	32

18	Evolução Percentual do Cálculo da Integral com a Variação do Limite Inferior .	32
19	Comparação com os Resultados de Hurst . . . . .	33
20	Modelos de Superposição no Tempo . . . . .	34
21	Comparação com Hurst 1 . . . . .	36
22	Comparação com Hurst 2 . . . . .	37
23	Comparação com Hurst 3 . . . . .	37
24	Comparação com Hurst 4 . . . . .	38
25	Comparação com Hurst e Simulador . . . . .	39
26	Comparação Percentual com Hurst . . . . .	39
27	Comparação com Babu . . . . .	40
28	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 0.001$ . . . . .	40
29	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 0.01$ . . . . .	41
30	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 0.1$ . . . . .	41
31	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 1$ . . . . .	42
32	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 10$ . . . . .	42
33	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 100$ . . . . .	43
34	Cálculo de $Q_d$ para $t_d = 1000$ . . . . .	43
35	Evolução do Cálculo de $Q_d$ para Reservatório Cilíndrico Selado com $r_{de} = 100$	49
36	Evolução Percentual do Cálculo de $Q_d$ para Reservatório Cilíndrico Selado com $r_{de} = 100$ . . . . .	49
37	Evolução de $Q_d$ com $td$ , e Comparação com Hurst . . . . .	50
38	Poço Horizontal Dividido em Segmentos . . . . .	57
39	Resumo das Principais Soluções Analíticas Desenvolvidas . . . . .	58
40	Distribuição Estabilizada de Fluxo ao Longo da Parede de um Poço Horizontal	59
41	Reservatório Isotrópico . . . . .	60

42	Reservatório com Poço Comprido . . . . .	61
43	Reservatório com Poço de Pequeno Comprimento . . . . .	61
44	Poço Descentralizado . . . . .	62
45	Evolução de $f(x)$ para $\lambda = a = 0.1$ . . . . .	81
46	Evolução de $f(x)$ para $\lambda = a = 0.1$ . . . . .	82
47	Evolução de $f(x)$ para $\lambda = a = 0.000002$ . . . . .	82
48	Evolução de $f(x)$ para $\lambda = a = 0.000002$ . . . . .	83
49	Raízes de $f(x)$ . . . . .	83

# Índice de Tabelas

1	Função Fonte Instantânea Básica para uma Fonte Plana Infinita em um Reservatório Infinito . . . . .	56
2	Função Fonte Instantânea Básica para uma Fonte Placa Infinita em um Reservatório Infinito . . . . .	56

# Resumo

Na presente dissertação de mestrado foi realizada uma investigação das soluções semi-analíticas já existentes na literatura, de forma a determinar as extensões da validade destas soluções, e permitir um melhor projeto e acompanhamento dos reservatórios explorados por poços horizontais e inclinados.

A razão de se estudar este assunto deve-se ao interesse crescente mundial em poços horizontais e inclinados. Interesse justificado pelos melhores índices de produtividade obtidos pelos poços horizontais quando comparados com os tradicionais verticais. Diversas situações como o de formação de cone de gás, reservatórios com pequenas espessuras ou reservatórios com permeabilidades verticais muito maiores que as horizontais podem também tornar os poços horizontais atrativos.

Hoje, os poços horizontais e inclinados são uma realidade, graças ao recente avanço de técnicas de perfuração aplicado a poços direcionais, e ao melhor conhecimento da geologia de reservatório através, entre outras ferramentas, da sísmica 3D. A simulação de poços horizontais e inclinados, contudo, não vem acompanhando esses avanços, permanecendo como um vasto campo aberto a pesquisa, de forma a poder acompanhar a diversificada gama de informações que outras técnicas vem colocando ao seu dispor.

O objetivo deste trabalho foi o de ajustar um modelo semi-numérico, desenvolvido através de funções de Green, com simulações utilizando simuladores convencionais e modelos analíticos com a finalidade de determinar a validade deste modelo e investigar as condições de contorno internas que melhor representam o escoamento através de poços horizontais e inclinados.

Uma contribuição importante deste trabalho, foi o desenvolvimento de funções de Green para o problema cilíndrico infinito e selado, considerando modelo de fonte tipo condutividade infinita. Foi realizada uma comparação dos nossos resultados com os de outros autores e com os oriundos de simulação numérica para o regime de fluxo radial inicial. Esta comparação mostrou boa performance quanto a precisão dos resultados e o esforço computacional.

Outra contribuição importante, foi o desenvolvimento de um procedimento para o cálculo das raízes, de uma função envolvendo termos com produtos de função de Bessel de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> espécies, até então não encontrado na literatura.

# Abstract

This dissertation presents an investigation of semi-analytical solutions available in the scientific literature, in order to determine the extension of the validity of these solutions, and provide a tool to help develop reservoirs using horizontal and deviated wells.

This topic is important because of increasing world interest in horizontal and slanted wells. Interest is justified by better productivity indices obtained by horizontal wells when compared with conventional wells. Several problems including gas cone formations, thin reservoirs or reservoirs with vertical permeability larger than horizontal, make horizontal wells attractive solutions these types of problem.

Today, the horizontal and deviated wells is comun, due the recent progress of drilling techniques applied to directional wells and better knowledge about reservoir geology through 3D seismic and others tools. Thus, the simulation of horizontal and deviated wells although is not available. This leaves a advances standing how a vast open field for research with objective to cover the diversity of information that others techniques have presented.

The main purpose this work was to extend a semi-numerical model, developed using Green's functions, with simulations using conventional simulators and analytical models objecting to determine the validity of this model and to investigate the inner boundary conditions to represent the best form of the flux in horizontal and deviated wells.

The important contribution of this work, was the development of the Green's functions to infinite and no-flux finite cylindrical problems, considering an infinite conductivity source. Our results are compared with other solutions and with simulation results. This comparison shows good performance in both solutions, precision and computation time.

Another important contribution, was the development of the root computing procedure contained a function using products of order 1 and 2 Bessel's functions, waas not available in scientific literature.

# Capítulo 1

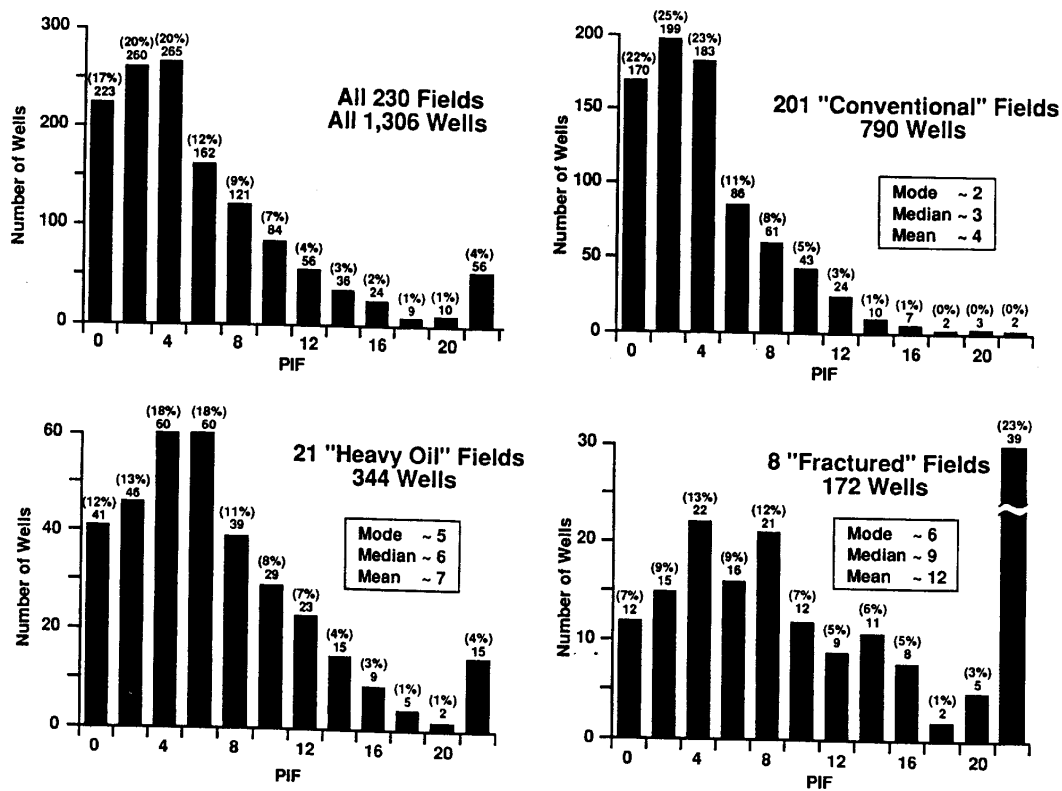
## Introdução

### 1.1 Motivação

Em uma análise de Beliveau[1], com dados de mais de 1000 poços horizontais especificamente comparando-os com os verticais, a maioria em reservatórios de carbonatos e arenitos, Beliveau[1] apresenta um resultado extremamente favorável aos poços horizontais em relação aos poços verticais (Figura 1) no que se refere ao **IP** (Índice de Produtividade) ou **PIF**(Productivity Improvement Factors) . O **IP** variou em média, de 3 a 6, atingindo 9 ou mais em campos altamente fraturados e poços horizontais com óleo pesado. Esta distribuição obedece a uma variação lognormal que é atribuída primariamente a heterogeneidades geológicas compostas por perfuração mecânica e efeitos de completação.

O interesse em poços horizontais teve um crescimento considerável na indústria do petróleo. Sua utilização objetivando um aumento das vazões de injeção ou de produção dos poços não é recente, tendo-se notícia do primeiro poço horizontal perfurado em 1957, na antiga União Soviética. Essa idéia baseou-se no fato destes poços poderem apresentar maior área de contato com o reservatório em relação aos poços verticais.

Até o fim dos anos 70, poucos poços horizontais haviam sido perfurados, apesar das inúmeras vantagens sobre os verticais. Os problemas encontrados para se perfurá-los e os custos adicionais envolvidos inibiram, durante muito tempo, investimentos para se criar tecnologias de perfuração e de completação desses poços.



**Figura 1: Índices de Produtividade (IP = PIF)**

Esse quadro, conforme descrito por Carvalho[2], veio se revertendo com significativos avanços obtidos na tecnologia de perfuração, completação e descrição geológica do reservatório. No Brasil, isto não é diferente pois a PETROBRAS desde 1984 vem perfurando alguns poços horizontais, sendo o primeiro perfurado no Campo de Fazenda Belém (CE).

À medida que a indústria do petróleo ganhou mais experiência e desenvolveu novas tecnologias, o custo dos poços horizontais caiu em relação ao custo dos poços verticais, possibilitando a sua maior utilização.

O poço horizontal é mais adequado a reservatórios com pequena espessura, em reservatórios naturalmente fraturados, em reservatórios com permeabilidade vertical muito maior que a horizontal, em reservatórios com problemas de cone de gás e/ou de água e em formações carbonáticas contra-indicadas ao fraturamento hidráulico. Seja pelo bom desempenho ou pelo custo, o fraturamento hidráulico é o grande concorrente dos poços horizontais. No entanto, se tivermos fraturamento hidráulico em reservatórios com poços horizontais, os resultados serão melhores ainda. Isto pode ser visto nas Figuras 1 e 2, que comparam poços horizontais (*Heavy Oil*) com os verticais (*Convencional*).



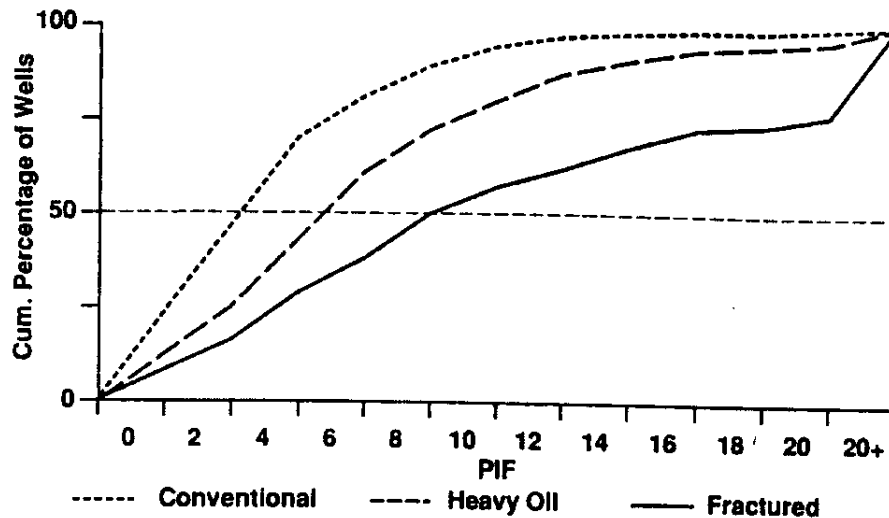


Figura 2: IP(s) dos Poços Convencionais (*Conventional*), Horizontais (*Heavy Oil*) e Fraturados (*Fractured*)

## 1.2 Objetivos

Como objetivos básicos deste trabalho, situou-se o de determinar o comportamento de diversos modelos analíticos e semi-analíticos para poços horizontais e inclinados e a sua comparação com modelos numéricos convencionais oriundos da simulação utilizando simuladores comerciais e, quando possível, com valores reais de teste de poço.

O trabalho investigou ainda o comportamento dos poços horizontais produzindo sob diversos regimes de fluxo e a influência das condições de contorno (principalmente internas na parede do poço) de forma a se poder avaliar situações mais realistas na simulação de poços horizontais.

O objetivo maior do trabalho foi o de fornecer parâmetros que permitam ao engenheiro de reservatório envolvido no projeto e acompanhamento de poços horizontais entender que tipo de modelamento matemático melhor se adapta ao problema em questão e que limitações este ou aquele modelo apresenta, ajudando-o, desta forma, a interpretar melhor os resultados.

O trabalho faz analogia com poços verticais a fim de auxiliar a interpretação de dados de poços horizontais. A interpretação de dados de testes de poços horizontais é uma tarefa muito mais difícil do que a de poços verticais. Estas dificuldades, segundo Kuchuck[3], estão

associados a:

1. A direção principal de pesquisa dos parâmetros usualmente não coincide com o ambiente deposicional.
2. A geometria do fluxo tri-dimensional não tem simetria radial.
3. Existe um número elevado de parâmetros a ser obtido.

Em adição a estas dificuldades, a variação zonal da permeabilidade vertical e a distribuição, principalmente do folhelho, fazem da interpretação uma tarefa mais complicada.

## 1.3 Etapas de Trabalho

Para atingir os objetivos anteriormente mencionados foi traçado e cumprido um cronograma de forma a atingir as etapas descritas a seguir:

1. Revisão bibliográfica da literatura referente a poços horizontais.
2. Entendimento das soluções(modelos) analíticas e semi-analíticas para os casos de poços horizontais.
3. Obtenção de programas para o cálculo dessas soluções seja por desenvolvimento próprio ou por intermédio de *software* existente no mercado.
4. Aprendizagem, treinamento no simulador comercial e posterior simulação numérica.
5. Desenvolvimento de soluções para os casos de reservatório produzindo com pressão constante ou variável com fronteira externa infinita e finita selada.
6. Comparação das soluções desenvolvidas com outras existentes na literatura e com simulações.
7. Análise de sensibilidade dos parâmetros envolvidos.

## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

## 2.1 Fundamentos Conceituais

### 2.1.1 Equações de Fluxo

O entendimento dos fenômenos que regem o escoamento dos fluidos em reservatórios de petróleo exige um perfeito conhecimento dos conceitos básicos da mecânica dos fluidos através de meios porosos. O desenvolvimento de idéias fundamentais através de modelos físicos e matemáticos são extremamente necessários e aplicáveis a exploração de jazidas de hidrocarbonetos. A hidrodinâmica extensivamente utilizada no assunto, simplifica as equações de escoamento de fluidos em meios porosos onde as leis fundamentais do escoamento são aplicáveis aos fluidos newtonianos em geral.

Problemas da estática e dinâmica dos fluidos são relacionados com 4 tipos de forças e energias potenciais, nominalmente:

1. Pressão;
2. Gravidade;
3. Pressão capilar;
4. Energia cinética.

Elas são de interesse na engenharia de petróleo na ordem anteriormente mencionada, com a energia cinética apresentando uma importância desprezível na mecânica de fluidos do

reservatório.

A pressão capilar tem grande influência na distribuição vertical das saturações dos fluidos. A magnitude desta "força" é da ordem de 1 atmosfera, o que a faz menos importante na maioria das equações de fluido, sendo portanto desprezada na maioria dos casos. Contudo a medida da pressão capilar pode ser usada para cálculo da estimativa da permeabilidade relativa para cada fase, parâmetro importante do fluxo de fluidos.

Potencial  $\Phi$  é a energia por unidade de massa ou:

$$\Phi = \frac{E}{m} \quad (2.1)$$

Sendo portanto o Potencial do Fluido a soma do Potencial de Pressão mais o Potencial de Gravidade:

$$\Phi = \int_{-p_0}^{+p} \frac{dp}{\gamma} + (z - z_0) \quad (2.2)$$

Para reservatórios pouco espessos, com baixa compressibilidade, como é o caso de reservatórios apropriados ao uso de poços horizontais, os efeitos gravitacionais são desprezíveis, e isto foi levado em conta neste trabalho. Carvalho[2] faz estimativas deste erro em seu trabalho concluindo que esta hipótese leva a erros insignificantes.

Quando se trata do fluxo de líquidos em meios porosos pode-se usualmente desprezar:

1. Expansão e Contração de fluidos;
2. Vorticidade (Turbilhonamento);
3. Variação da Viscosidade.

A difusão é um processo irreversível e não conservativo, análogo à fricção, onde a energia é dissipada. O problema da difusão ocorre quando um fluido é compressível. São exemplos de Difusão: fluxo térmico, difusão de um líquido dentro de outro líquido, difusão de neutrons através da matéria.

A equação básica do escoamento de fluidos em meios porosos resulta da combinação de três expressões fundamentais: equação da continuidade, a lei de Darcy e a equação da compressibilidade.

As expressões anteriormente mencionadas podem ser escritas nas seguintes formas, respectivamente:

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{v} = -\frac{\vec{k} \rho}{\mu} (\vec{\nabla} p - g \nabla D) \quad (2.4)$$

$$c = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T \quad (2.5)$$

onde:

$\vec{v}$  - vetor velocidade;

$\rho$  - densidade;

$\phi$  - porosidade;

$p$  - pressão;

$t$  - tempo;

$k$  - permeabilidade;

$\mu$  - viscosidade;

$D$  - profundidade;

$g$  - gravidade;

$c$  - compressibilidade;

$V$  - volume;

$T$  - temperatura.

A combinação das três expressões anteriormente mencionadas e a definição da compressibilidade total do sistema fluido-rocha como sendo a soma da compressibilidade da rocha mais a compressibilidade do fluido, considerando fluxo unifásico, dá-nos como resultado final a equação da difusividade que é a equação diferencial que rege o escoamento de fluidos em meios porosos.

Aplicando-se a lei de Darcy, que representa a lei da conservação de movimento, a equação da continuidade, que representa o princípio da conservação de massa, temos:

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{k} \rho}{\mu} (\vec{\nabla} p - g \nabla D) \right) = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} \quad (2.6)$$

Considerando o meio isotrópico, fluido com viscosidade constante, e desprezando-se os efeitos gravitacionais:

$$\nabla(\rho \nabla p) = \frac{\mu}{k} \left( \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.7)$$

Escrevendo-se a equação na forma diferencial, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\mu}{k} \left( \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (2.8)$$

Desenvolvendo-se a equação da compressibilidade para fluidos, temos uma relação entre  $\rho$  e  $p$ :

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.9)$$

Aplicando-se a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{c \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{c \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.12)$$

Analogamente, para a rocha, a equação da compressibilidade pode ser escrita:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (2.13)$$

onde  $c_f$  é a compressibilidade da rocha.

Aplicando-se a regra da cadeia a expressão  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = c_f \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.14)$$

$$= c_f \phi \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{c_f \phi}{c \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.15)$$

Substituindo as expressões (2.9) a (2.15) na expressão (2.8), temos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\mu \phi}{k} (c + c_f) \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.16)$$

Definindo a compressibilidade total como sendo a soma da compressibilidade do fluido e da rocha, ou  $c_t = c + c_f$ , temos como resultado final:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\mu \phi c_t}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.17)$$

Escrevendo em termos de pressão temos o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( c \rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = c \rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$= c \rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c^2 \rho \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \quad (2.20)$$

Analogamente, para  $y$  e  $z$ :

$$c \rho \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + c^2 \rho \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \quad (2.21)$$

$$c \rho \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + c^2 \rho \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \quad (2.22)$$

Para a expressão do fluxo, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = c \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.23)$$

Substituindo as expressões (2.20) a (2.23) na expressão (2.17), temos:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + c \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right) = \frac{\mu \phi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.24)$$

Considerando pequenos gradientes de pressão no meio poroso e pequena compressibilidade do líquido, abandonamos os termos não lineares.

Logo, temos para equação da difusividade simplificada:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.25)$$

ou

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.26)$$

onde  $\eta$  é o coeficiente de difusividade hidráulica e equivale a:

$$\eta = \frac{k}{\mu \phi c_t} \quad (2.27)$$

## 2.2 Regimes de Fluxo

### 2.2.1 Fluxo em Poços Verticais

Após o início da produção de um poço, passa a ocorrer uma contínua variação de pressões no interior do meio poroso. Entretanto, no começo da vida produtiva do reservatório, o comportamento da pressão nas imediações do poço não é afetado pelas condições de contorno que ocorrem nos limites externos do reservatório. Este período de escoamento é denominado Fluxo Transiente e o poço comporta-se como se o reservatório fosse infinito. Por outro lado, à medida que o poço continua produzindo, os limites externos do reservatório passam a influenciar o comportamento da pressão nas imediações do poço, até que seja alcançado um período de fluxo estabilizado.

Quando se trata de um reservatório realimentado externamente, quer pela presença de um influxo de água ou pela injeção de fluidos, este regime de estabilização de pressões é



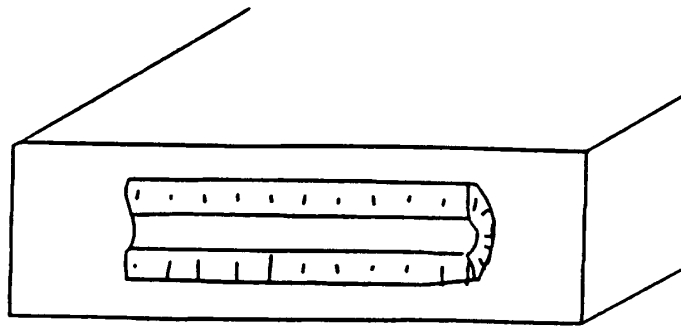
denominado Fluxo Permanente. Porém, quando os limites externos do reservatório são caracterizados pela ausência de transmissibilidade, configurando um reservatório externamente fechado, o comportamento das pressões passa a ser regido pelo regime de fluxo denominado Pseudo-Permanente.

## 2.2.2 Fluxo em Poços Horizontais

Diferentemente dos poços verticais, os poços horizontais podem possuir no regime transiente quatro tipos de regimes de fluxo. São eles:

### 1. Fluxo Radial Inicial (Figura 3)-

Este regime se dá no início de produção, e é comparável ao período de fluxo radial em um poço vertical quando em um reservatório infinito totalmente fraturado. A onda de pressão não é afetada pelo contorno externo (ação infinita), é ortogonal à direção do poço, e possui um formato elíptico, para um reservatório anisotrópico, ou cilíndrico para reservatório isotrópico. Quanto menor a permeabilidade vertical e maior a espessura do reservatório, maior será a duração desse regime. Esse regime termina quando a onda de pressão atinge o limite superior/topo ou inferior/base do reservatório. Se o poço não estiver centrado no reservatório, deve ocorrer um período de fluxo hemi-cilíndrico intermediário entre este e o próximo período.

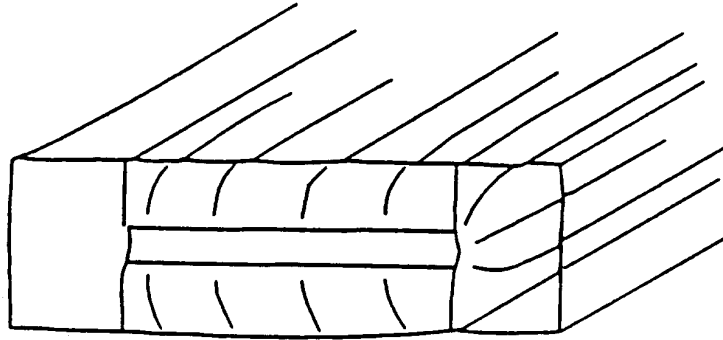


**Figura 3: Fluxo Radial Inicial**

### 2. Fluxo Linear Inicial (Figura 4)-

Este regime ocorre após o regime de fluxo radial inicial, quando o comprimento do poço é significativamente maior que a espessura do reservatório. Neste caso, a onda de

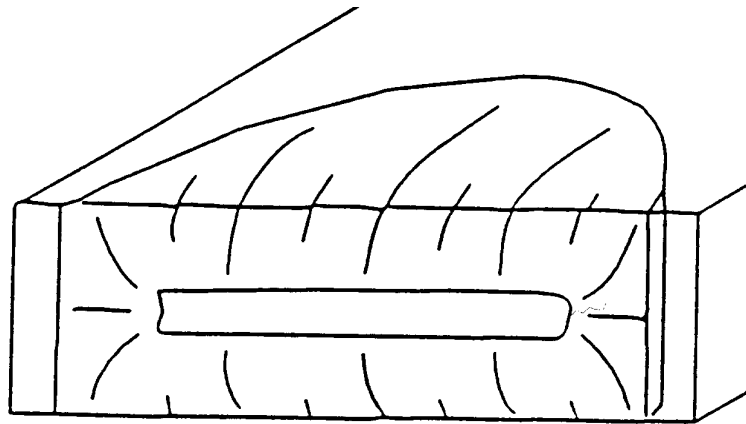
pressão, após atingir o topo e base do reservatório, caminha lateralmente. Se fizermos uma analogia com poços verticais seria uma fratura vertical.



**Figura 4: Fluxo Linear Inicial**

3. Fluxo Pseudoradial Tardio (Figura 5)-

Este regime de fluxo é radial no plano horizontal. O poço comporta-se como uma fonte pontual. Este efeito somente é possível se o comprimento do poço for pequeno quando comparado a extensão longitudinal do reservatório (Segundo Babu[5] a taxa  $\frac{L}{b}$  (Figura 7) deve ser menor que 0.45).

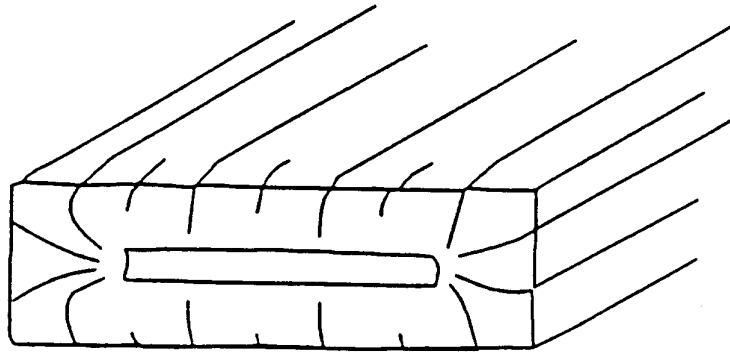


**Figura 5: Fluxo Pseudoradial**

4. Fluxo Linear Tardio (Figura 6)-

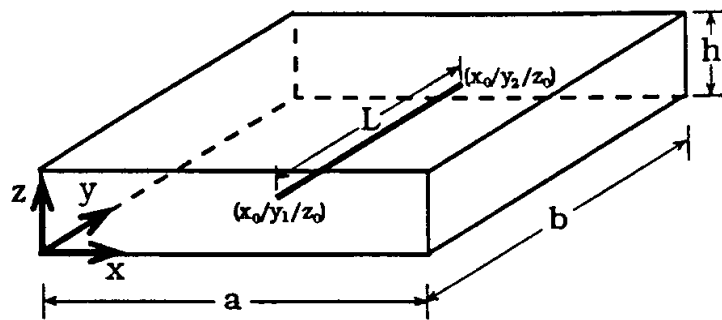
Neste regime, a onda de pressão atinge os limites do reservatório na extensão longitudinal. Novamente, é análogo a uma fratura vertical nos poços verticais, no entanto, incluindo um fator de película devido a penetração parcial.

Todos os regimes de fluxo mencionados são associados a um modelo de reservatório tipo bloco fechado (conforme Figura 7). Necessariamente, não é preciso que apareça todos os



**Figura 6: Fluxo Linear Tardio**

regimes de fluxo em um reservatório, isso vai depender, das dimensões do poço e reservatório existente, e das condições de contorno externo atuantes, mais especificamente da existência de contornos selantes, os quais podem ser mascarados pela presença de aquíferos fracos, falhas pouco permeáveis ou outra feição geológica.



**Figura 7: Modelo de Reservatório tipo Bloco Fechado**

Conforme Figura 8, Economides[10] mostra uma aplicação onde o poço é relativamente curto, comparado com a dimensão  $b$  ( $L < 0.2b$ ) e a espessura do reservatório não é tão pequena (por exemplo:  $h > 0.05b$ ), Os regimes de fluxo do período Transiente presentes são: Radial Inicial, Linear Inicial e Pseudo-Radial. Em outro caso (Figura 9), o poço tem um comprimento grande ( $L > 0.8b$ ): o período de fluxo Pseudo-Radial não aparece após o período de Fluxo Linear.

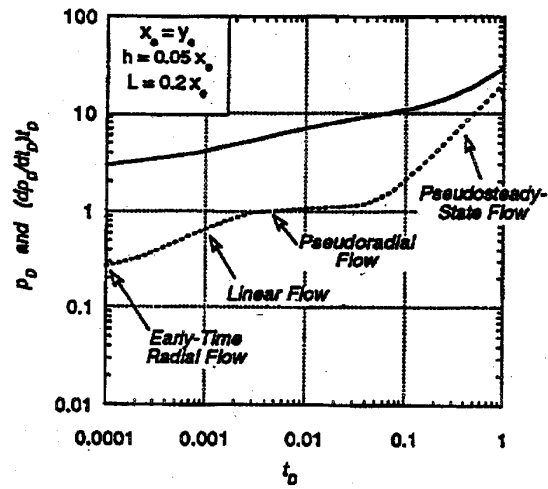


Figura 8: Regimes de Fluxo Presentes para Poços Horizontais

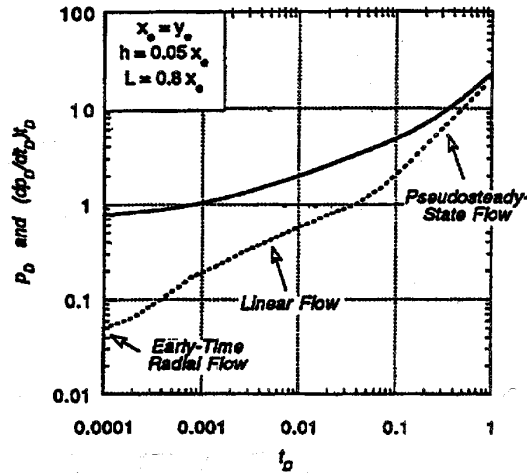
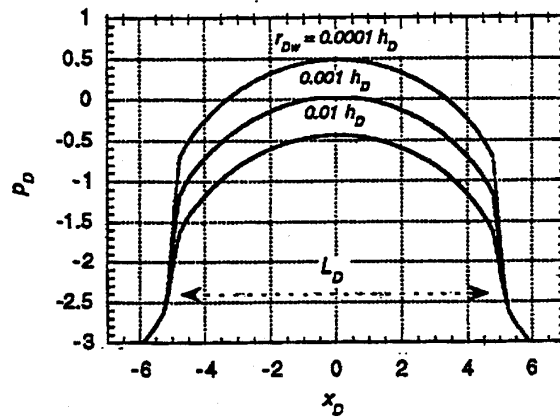


Figura 9: Regimes de Fluxo Presentes para Poços Horizontais

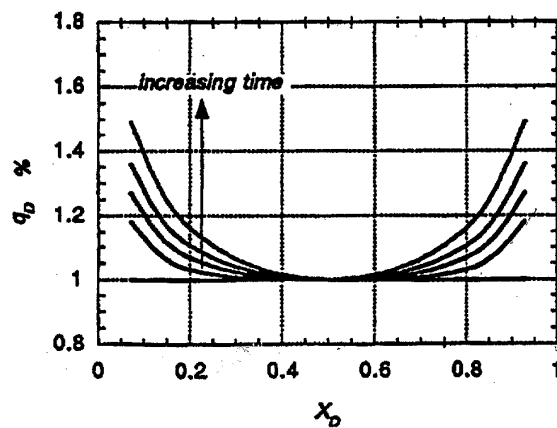
## 2.3 Modelo de Fonte

Como condição de contorno interna, existem dois modelos teóricos a serem considerados no caso de fluxo em poços horizontais. São eles: fluxo uniforme (Figura 10) e condutividade infinita (Figura 11). O primeiro considera o poço produzindo com uma vazão de produção constante ao longo de todo o poço, provocando conseqüentemente uma distribuição de pressão não uniforme ao longo do poço. O segundo considera que não há resistência ao fluxo dentro do poço, conseqüentemente a pressão é constante e a vazão varia.

Conforme Carvalho[2], esses modelos foram introduzidos por Gringarten[4], em 1978, no estudo de fraturas verticais. Posteriormente, Cinco-Ley et al.[6] desenvolveram um modelo de



**Figura 10: Pressão no Regime Pseudo-Permanente para Modelo Fluxo Uniforme ao Longo do Poço**



**Figura 11: Fluxo no Poço com Pressão Constante para Diferentes Tempos**

condutividade finita. Esse modelo procura contornar os inconvenientes de se obter fraturas com condutividade infinita em muitos fraturamentos hidráulicos e a tendência da condutividade da fratura diminuir com o tempo.

Conforme Economides[10], um dos primeiros modelos foi desenvolvido por Borisov[8] em 1964, que assumiu uma área de drenagem elíptica com pressão constante dependente do comprimento do poço. Esta configuração foi mais desenvolvida, posteriormente equacionada e amplamente utilizada por Joshi[9] em 1988, que considerou anisotropia das permeabilidades vertical e horizontal. Economides e al.[10], em 1991, aplicaram essa configuração para um poço em coordenadas cilíndricas.

Um desenvolvimento significativo na literatura sobre o comportamento transiente de pressão em poços horizontais surgiu a partir de 1985 .

Em 1985, Daviau et al.[11] elaboraram um modelo de fluxo uniforme incluindo efeitos de película e de estocagem. Efeitos de fronteira e métodos de interpretação de testes de pressão também foram apresentados. Daviau sugere que a solução do modelo de fluxo uniforme usando a distância adimensional  $x_d = 0.7$  é uma boa aproximação para simular o comportamento de um poço com condutividade infinita.

Goode e Thambynayagam [12] apresentaram uma solução analítica para a resposta de pressão de fluxo e de crescimento de pressão de um poço horizontal sem efeitos de estocagem em um reservatório semi-infinito. Eles enfatizaram o caso do poço no centro da formação.

Ainda em 1986, Clonts e Ramey[13] apresentaram uma solução analítica para o comportamento transiente de pressão em poços horizontais com fluxo uniforme em um reservatório infinito anisotrópico. Em analogia à solução da fratura vertical com condutividade infinita, Clonts avaliou as pressões na distância adimensional  $x_d = 0.732$ , medida ao longo da porção horizontal do poço e a partir do seu centro.

Em 1987, Rosa e Carvalho[14] estudaram o modelo de fluxo uniforme, reconhecendo diferentes regimes de fluxo. E ainda em outro trabalho(1988) consideraram do condutividade infinita utilizando fontes pontuais desenvolvidas por Green (Fontes de Fluxo Uniforme).

Em 1988, Kuchuk et al.[3] desenvolveram soluções para reservatório infinito e semi-infinito com e sem aquífero considerando efeitos de película e de estocagem, pressão média ao longo do poço e, em outro caso, o índice de produtividade.

Também em 1988, Babu e Odeh[5] apresentaram soluções para todos os regimes de fluxo, considerando reservatório selado em todas as direções, fator de forma e de película e determinando a pressão no poço através da média do índice de produtividade.

Dentre os métodos de solução empregados, destacam-se o de transformadas integrais e o uso de funções de Green instantâneas. A maior parte dos autores descritos anteriormente que trabalham com funções de Green instantâneas utilizam o desenvolvimento dessas por Gringarten[4], o qual utiliza somente o modelo de fontes de fluxo uniforme. A utilização deste modelo é mais fácil do que a de condutividade infinita que ocasiona um problema de valor de contorno complexo evitado por muitos autores.

Quanto aos modelos de fonte, acreditamos que na realidade o poço produz com condições diversas das duas consideradas acima, apresentando vazão e pressão variáveis ao longo do seu trecho horizontal. Assim, pretendeu-se, a partir de um modelo semi-analítico, investigar o

comportamento dessas duas condições nos resultados finais.

## 2.4 Modelo Físico-Matemático

A distribuição de pressão em um reservatório, como foi dito anteriormente é dada pela equação diferencial parcial da difusividade, que, para fluxo de fluidos em meios porosos anisotrópicos, pode ser escrita na forma:

$$\eta_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \eta_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \eta_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

onde:

$p$  - pressão;

$x, y, z$  - coordenadas do sistema cartesiano;

$t$  - tempo;

$\eta$  - coeficiente de difusividade hidráulica.

Em muitos casos, podemos representar a equação (2.28) no sistema de coordenadas cilíndricas na forma:

$$\eta_r \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \eta_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.29)$$

Na modelagem físico-matemática de um reservatório, como condição inicial, considera-se a pressão/potencial em todo o reservatório constante. Matematicamente:

$$p = p_i \quad \text{para} \quad t = 0 \quad (2.30)$$

onde  $p_i$  é a pressão inicial.

Quanto aos contornos externos do reservatório, considera-se dois casos principais de comportamento: Pressão constante/fronteira realimentada e ausência de fluxo/fronteira selada. O primeiro pode ser devido à presença de uma capa de gás ou um aquífero na fronteira que

influi sobre o reservatório; O segundo é associado a uma falha ou algo similar que interrompe o fluxo, agindo como um selo ou uma capa impermeável. Respectivamente, estas condições são representadas da seguinte forma:

$$p = p_{constante} \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (2.32)$$

onde  $r_{ext}$  é o raio externo.

Quando a extensão horizontal do reservatório é muito maior que a extensão vertical, que é uma característica de reservatórios para poços horizontais, assume-se extensão lateral infinita (fronteira externa infinita), o que reduz a um problema no espaço 2D facilitando assim a resolução.

Como foi dito anteriormente, a maior parte dos modelos de poços horizontais considera como condição de contorno interna a de condutividade infinita, o que equivale ter o poço com pressão constante em todo o seu comprimento, ou então fluxo constante, neste caso o poço esta produzindo com vazão constante em todos os seus pontos, variando assim a pressão. Respectivamente, tem-se:

$$p = p_{constante} \quad \text{para } r = r_w \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = constante \quad \text{para } r = r_w \quad (2.34)$$

onde  $r_w$  é o raio do poço.

A realidade mostra que o poço produz com condições diversas das duas consideradas anteriormente, apresentando vazão e pressão variáveis ao longo do seu trecho horizontal quando há perda de carga por fricção dentro do poço. Assim, pretende-se propor um modelo com a finalidade de investigar o comportamento dessas condições nos resultados finais.



## Capítulo 3

# Funções de Green

### 3.1 Fórmulas de Green

No estudo da Teoria de Potencial, o problema mais comum e de certo grau de dificuldade é encontrar a solução da equação diferencial parcial relacionada. Para tal são exploradas técnicas como expansões em auto-funções. Este método resolve problemas com diversas condições de contorno, usando sistemas de coordenadas diversos. No entanto, suas soluções são sempre em forma de séries infinitas, as quais a convergência é frequentemente vagarosa, tornando-as, portanto, soluções difíceis de serem obtidas em muitos casos. Por estes aspectos, seria mais desejável obter soluções envolvendo funções fechadas, ou integrais de funções fechadas: a técnica de função de Green é uma forma de representação exatamente deste tipo.

No desenvolvimento da solução da equação diferencial parcial da difusividade por funções de Green, primeiramente escreve-se a equação em sua forma integral, isto nada mais é do que a aplicação dos teoremas de Green (1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup>), os quais podem ser escritos respectivamente nas seguintes formas:

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\chi) d\vec{r} + \iiint_{\mathcal{D}} (\varphi \nabla^2 \chi) d\vec{r} = \oint_S \varphi \left( \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \cdot dS \right) \quad (3.1)$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\chi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \chi) d\vec{r} = \oint_S \left( \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (3.2)$$

O desenvolvimento destas fórmulas podem ser vistos, em detalhes, no Apêndice **A**.

Tendo-se a equação na forma integral, procura-se a função de Green referente a equação

diferencial e condições de contorno dadas. Se obtivermos a função de Green, então, o problema tem solução na forma integral. A dificuldade no entanto é encontrar a função de Green apropriada a cada problema, com a geometria e condições de contorno específicas.

### 3.2 Funções de Green Aplicada a Equação da Difusividade(Caso Isotrópico)

É possível resolver vários problemas não-homogêneos e de valor inicial em termos de funções de Green, as quais satisfazem as condições de contorno não homogênea e a condição de causalidade:

$$G(\bar{r}, t, |\bar{r}_0, t_0) = 0 \quad \text{para} \quad t < t_0 \quad (3.3)$$

A equação satisfeita por  $G$ , representa uma fonte pontual impulsiva:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G = 4 \pi \delta(\bar{r} - \bar{r}_0) \delta(t - t_0), \quad (3.4)$$

onde  $\delta$  é a função delta de Dirac:

$$\delta(\tau - \tau_0) = \begin{cases} 0, & \tau \neq \tau_0 \\ \infty, & \tau = \tau_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_0) d\tau = 1, \quad (3.6)$$

$$\delta(\bar{r} - \bar{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.7)$$

Para interpretar a expressão (3.6), digamos que  $G$  é temperatura ou pressão de um meio. Então se introduzirmos uma fonte pontual impulsiva de valor unitário (temperatura ou pressão)

no ponto  $r_0$  e no tempo  $t_0$ ,  $G$  representará a temperatura ou pressão no tempo posterior em um outro ponto qualquer do meio, e portanto descreverá a maneira pela qual a difusão do calor ou pressão ocorrerá.

Devemos obter a solução da equação da difusividade não-homogênea com condições de contorno não-homogêneas e determinada condição inicial, em termos de  $G$ .

A equação a ser resolvida é:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 4\pi \rho(\vec{r}_0, t_0), \quad (3.8)$$

onde  $\rho$ , função fonte, é conhecida nas coordenadas espaço e tempo. Multiplicando esta equação por  $G$  e a equação (3.4) por  $u$ ; subtraindo as duas equações; integrando sobre o espaço e sobre o tempo de 0 a  $t^+$  ( $t^+ = t + 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} dt_0 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 [u \nabla_0^2 G - G \nabla_0^2 u] + \frac{1}{\eta} \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 \int_0^{t^+} dt_0 [u \frac{\partial G}{\partial t_0} - G \frac{\partial u}{\partial t_0}] &= \\ &= \int_0^{t^+} dt_0 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 [\rho G - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) u] = \\ &= \int_0^{t^+} dt_0 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 [\rho G - 4\pi u(\vec{r}, t)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o símbolo "0" significa que a operação é correspondente a variável  $t_0, \vec{r}_0$ .

Devemos aplicar as fórmulas de Green para encontrar a primeira destas integrais. No caso da segunda, uma integração no tempo deve ser feita. Por definição, conforme a equação (3.3),  $G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t^+) \equiv 0$ .

Finalmente temos:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \int_0^{t^+} dt_0 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 G \rho(\vec{r}_0, t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{t^+} dt_0 \int_{\mathcal{S}} dS_0 [G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} - u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0}] \\ &+ \frac{1}{4\pi \eta} \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}_0 [u G]_{t_0=0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\mathcal{S}$  é o contorno de  $\mathcal{D}$ , e  $\vec{n}$  é a vetor normal a  $\mathcal{S}$ .

$G$  é então escolhido de tal forma que satisfaça as condições de contorno homogêneas correspondentes as condições de contorno satisfeitas por  $u$ . Por exemplo, se  $u$  satisfaz as condições de contorno homogêneas ou não-homogêneas de Dirichlet,  $G$  é escolhido para satisfazer as condições homogêneas de Dirichlet.

## Capítulo 4

# Reservatório Cilíndrico

### 4.1 Reservatório Cilíndrico Infinito

Inicialmente definimos um reservatório cilíndrico com as seguintes considerações, condições de contorno e iniciais:

1. A pressão inicial do reservatório é constante.
2. A pressão no contorno interno é uniforme (condição de condutividade infinita).
3. O reservatório é considerado semi-infinito (O contorno externo não é atingido).
4. Fluxo Unifásico
5. Fluido Newtoniano, levemente compressível com viscosidade constante.
6. Efeitos gravitacionais e capilares desprezíveis.
7. Meio isotrópico.
8. Efeitos de Estocagem e pelicular desprezíveis.

Neste caso, estamos interessados no regime de fluxo radial inicial, sendo assim mais adequado usarmos a equação da difusão em coordenadas cilíndricas. Considerando neste caso um cilindro infinito, temos que, todas as funções são independentes da variável espacial na direção axial, no caso:  $z$ .

### 4.1.1 Derivação das Equações de Pressão

Sendo  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , onde  $i, j$  são as unidades de Orts do sistema de coordenadas cartesiano no plano, e considerando o domínio  $\mathcal{D} = \{(\vec{r}, t) | r \geq r_w, t \geq 0\}$ , onde  $r = |\vec{r}| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ , temos a solução para a equação da difusividade na seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^2 p \quad (4.1)$$

Considerando um problema com condição inicial homogênea:

$$p = 0 \quad \text{para} \quad t = 0 \quad (4.2)$$

e condições de contorno interna tipo Dirichlet:

$$p = p_{wf} \quad \text{para} \quad r = r_w \quad \text{e} \quad t > 0 \quad (4.3)$$

onde  $p_{wf}$  é constante.

e domínio externo infinito, deve-se considerar a solução satisfazendo a condição de infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p = 0 \quad (4.4)$$

Para construção da solução do problema, consideraremos o sistema de coordenada polar  $(r, \varphi)$ :

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi, \quad r \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4.5)$$

e o uso do método da Função de Green.

Devido ao fato das funções de nosso problema não dependerem da variável ângulo, pode-se considerar nossa função somente dependente das variáveis  $r, t$ :

$$p = p(r, t) \quad (4.6)$$

Sendo assim, a equação a ser considerada pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.7)$$

Neste caso, considerando a região livre de fontes e as condições expressas nas equações (4.1) a (4.4), aplicando-se a expressão (3.10), temos:

$$p(r, t) = \frac{p_{wf}}{4\pi} \int_0^t dt_0 \int_S \frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0) dS \quad (4.8)$$

onde  $S = (\bar{r}|r = r_w)$  é o contorno do domínio  $\mathcal{D}$ .

Podemos construir uma representação mais conveniente para  $p(r, t)$ :

$$p(r, t) = \frac{2\pi r_w p_{wf}}{4\pi} \int_0^t \left( \frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0) \right)_{r_0=r_w} dt_0 \quad (4.9)$$

Pois neste caso  $dS = r_w d\varphi$  e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0) dS &= r_w \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0) \right)_{r_0=r_w} d\varphi = \\ &= 2\pi r_w \left( \frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0) \right)_{r_0=r_w} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para  $\frac{\partial G}{\partial r_0}(r, t|r_0, t_0)$  quando  $r_0 = r_w$  e conforme a função de Green, expressão (B.14), desenvolvida no Apêndice **B** teremos:

$$\frac{\partial G}{\partial r_0} = 2\theta(t - t_0) \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2(t-t_0)} \varphi_\lambda(r) \lambda}{(J_0^2(r_w \lambda) + Y_0^2(r_w \lambda))} \frac{d\varphi_\lambda(r_0)}{dr_0} d\lambda \quad (4.11)$$

sendo:

$$\left( \frac{d(\varphi_\lambda(r_0))}{dr_0} \right)_{r_0=r_w} = (-J_0(\lambda r_w) Y_1(\lambda r_w) + Y_0(\lambda r_w) J_1(\lambda r_w)) = \frac{2}{\pi r_w} \quad (4.12)$$

Considerando  $\theta(t - t_0)$ , função de Heaviside, conforme Apêndice **B**, teremos para a equação (4.9):

$$p(r, t) = \frac{2p_{wf}}{\pi} \int_0^t dt_0 \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2(t-t_0)} \varphi_\lambda(r) \lambda d\lambda}{(J_0^2(r_w \lambda) + Y_0^2(r_w \lambda))} \quad (4.13)$$

Integrando com respeito a  $t$ , temos:

$$p(r, t) = \frac{2p_{wf}}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - \exp^{-\lambda^2(t-t_0)}) \varphi_\lambda(r) d\lambda}{(J_0^2(r_w \lambda) + Y_0^2(r_w \lambda)) \lambda} \quad (4.14)$$

Usando a fórmula bem conhecida na literatura (conforme Titchmarch [25]):

$$\frac{2}{\pi} \int_0^t dt_0 \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(r)}{(J_0^2(r_w \lambda) + Y_0^2(r_w \lambda))} d\lambda = 1 \quad (4.15)$$

Podemos representar a equação (4.14) na forma:

$$p(r, t) = p_{wf} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2(t-t_0)} \varphi_\lambda(r)}{(J_0^2(r_w \lambda) + Y_0^2(r_w \lambda)) \lambda} d\lambda \right] \quad (4.16)$$

que representa a solução do problema proposto nas expressões (4.1) a (4.4).

### 4.1.2 Derivação das Equações de Fluxo

Com a solução do problema em termos de pressão, aplicando a lei de Darcy temos a equação de vazão. Pela lei de Darcy temos:

$$q(t) = \frac{-2\pi k h r_w}{\mu B_o} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (4.17)$$

Sendo assim a produção acumulada será:

$$Q(t) = \int_0^t q(t) dt; \quad (4.18)$$

que desenvolvida, pode ser escrita:

$$Q(t) = \frac{-2\pi h k r_w}{\mu B_o} \int_0^t \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} dt \quad (4.19)$$

Utilizando os parâmetros adimensionais:

$$p_d = \frac{p_i - p}{p_i - p_{wf}}; \quad (4.20)$$

$$r_d = \frac{r}{r_w}; \quad (4.21)$$

$$t_d = \frac{k}{\mu \phi c_t r_w^2 t} \quad (4.22)$$

temos:

$$Q(t) = \frac{-2\pi h k r_w}{\mu B_o} \int_0^t \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_d} (p_i - p_d \cdot (p_i - p_{wf}))_{r_d=1} \cdot \frac{B_o k}{\mu \phi c_t r_w^2} dt_d \quad (4.23)$$

$$Q(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \Delta p_{wf} \int_0^{t_d} \left( \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} dt_d \quad (4.24)$$

$$Q(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \Delta p_{wf} Q_d(t_d) \quad (4.25)$$

onde:

$$Q_d(t_d) = \int_0^{t_d} \left( \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} dt_d \quad (4.26)$$

Aplicando-se as variáveis adimensionais a equação da difusividade, temos a mesma na forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 p_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial p_d}{\partial r_d} = \frac{\partial p_d}{\partial t_d} \quad (4.27)$$

Considerando as condições inicial e de contorno reais do problema:

$$p = p_i \quad \text{para} \quad t = 0 \quad (4.28)$$

$$p = p_{wf} \quad \text{para} \quad r = r_w \quad (4.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_i \quad (4.30)$$

e aplicando-se as variáveis adimensionais:

$$p_d = 0 \quad \text{para} \quad t_d = 0 \quad (4.31)$$

$$p_d = 1 \quad \text{para} \quad r_d = 1 \quad (4.32)$$



$$\lim_{r_d \rightarrow \infty} p_d = 0 \quad (4.33)$$

Similarmente a equação (4.16), podemos ver que o problema cilíndrico infinito terá solução adimensional:

$$p_d(r_d, t_d) = \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2 t_d} \varphi_\lambda(r_d) d\lambda}{(J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)) \lambda} \right\} \quad (4.34)$$

Calculando em termos de vazão,  $Q_d$ , conforme expressão (4.26), teremos:

$$\left( \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} = \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2 t_d} \cdot \left( \frac{\partial(\varphi_\lambda(r_d))}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} d\lambda}{(J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)) \lambda} \quad (4.35)$$

Desenvolvendo  $\varphi_\lambda(r)$  conforme a representação (B.9), temos:

$$\left( \frac{\partial(\varphi_\lambda(r_d))}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} = (J_0(\lambda) \cdot \dot{Y}_0(\lambda r_d) - \dot{J}_0(\lambda r_d) \cdot Y_0(\lambda)) = \frac{2}{\pi} \quad (4.36)$$

Substituindo as expressões anteriores na equação (4.26), temos:

$$Q_d(t_d) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{(J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)) \lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{t_d} \exp^{-\lambda^2 t} dt \quad (4.37)$$

ou após a integração com respeito a variável  $t$ , temos:

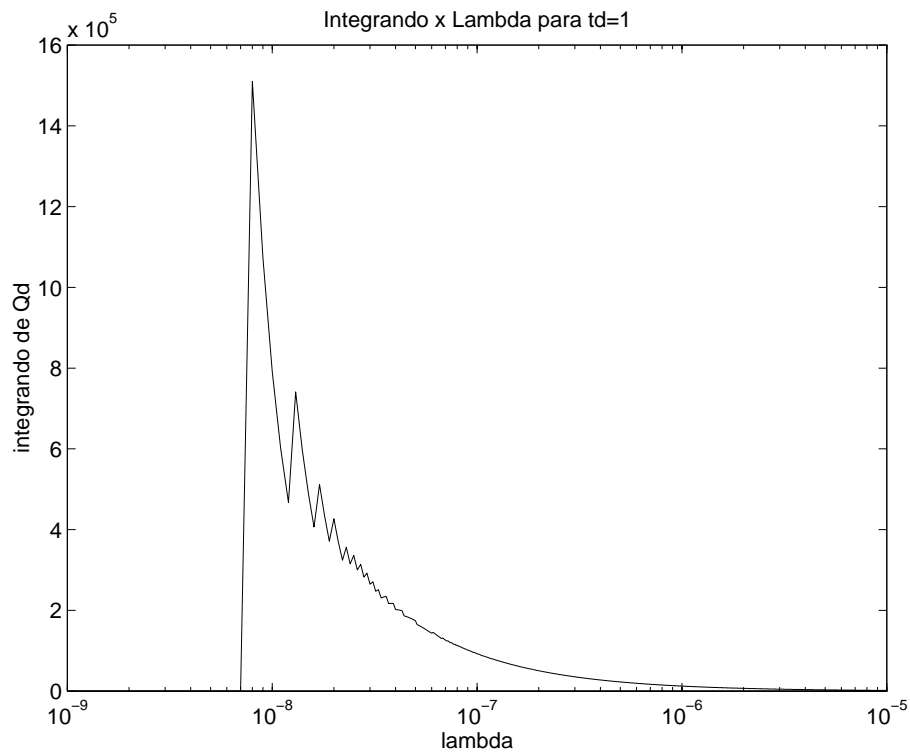
$$Q_d(t_d) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - \exp^{-\lambda^2 t_d})}{(J_0^2(\lambda) + Y_0^2(\lambda)) \lambda^3} d\lambda \quad (4.38)$$

### 4.1.3 Cálculo da Integral

O que queremos demonstrar aqui é o desenvolvimento do cálculo da integral de  $Q_d$  conforme equação (4.38). Calculando os limites da função, verificamos a sua convergência. Isto pode ser visto graficamente na Figura 12.

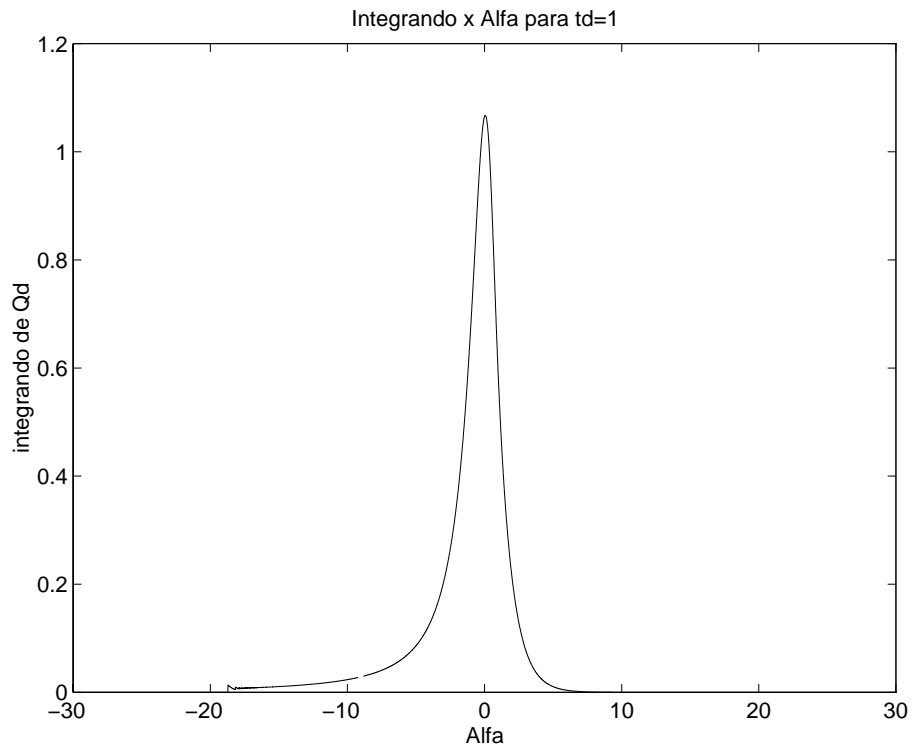
Fazendo-se a seguinte mudança na variável de integração:  $\lambda = \exp^\alpha$  a expressão (4.38) toma a forma:

$$Q_d(t_d) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{(1 - \exp^{-t_d \cdot \exp^{2\alpha}})}{(J_0^2(\exp^\alpha) + Y_0^2(\exp^\alpha)) \exp^{2\alpha}} d\alpha \quad (4.39)$$

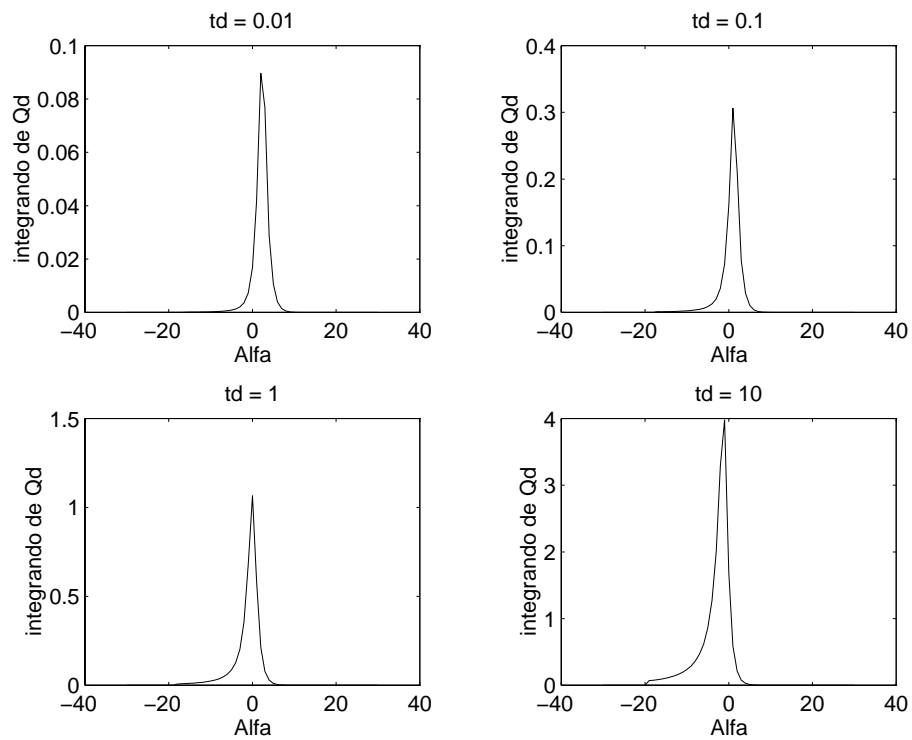


**Figura 12: Convergência da Função**

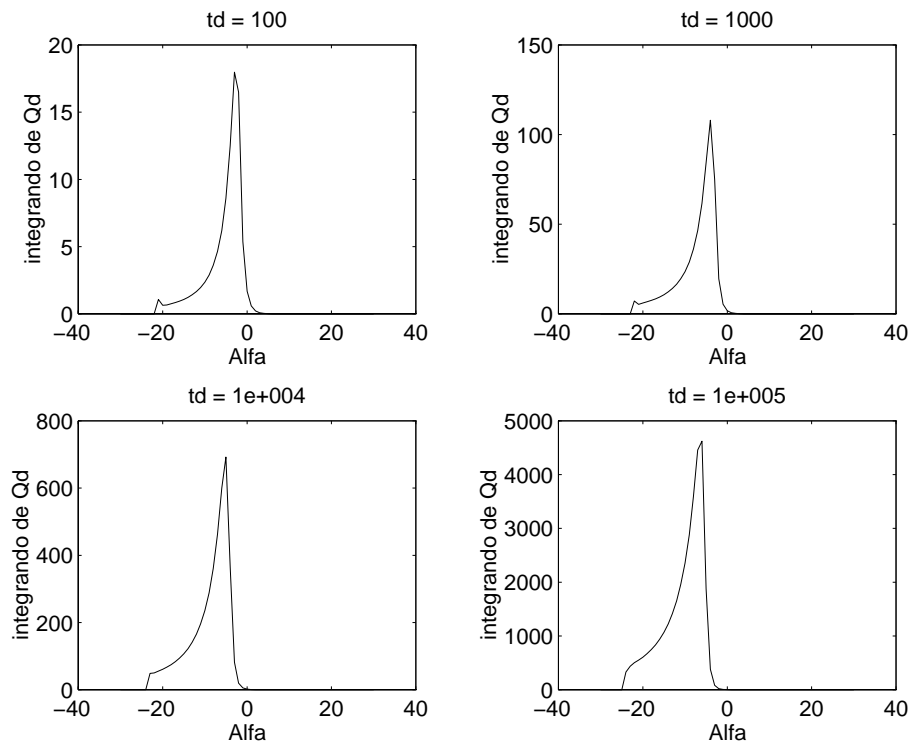
a qual graficamente pode ser expressa conforme a Figura 13, onde o numerador do integrando domina a parte ascendente da função e as funções de Bessel junto ao restante do denominador dominam a parte complementar da representação a qual é a parte descendente da função. Para os diferentes tipos de valores de  $td$ , teremos os seguintes limites mostrados nas Figuras 14 e 15.



**Figura 13: Função Após Mudança de Variável**



**Figura 14: Limites da Integral x  $t_d$**

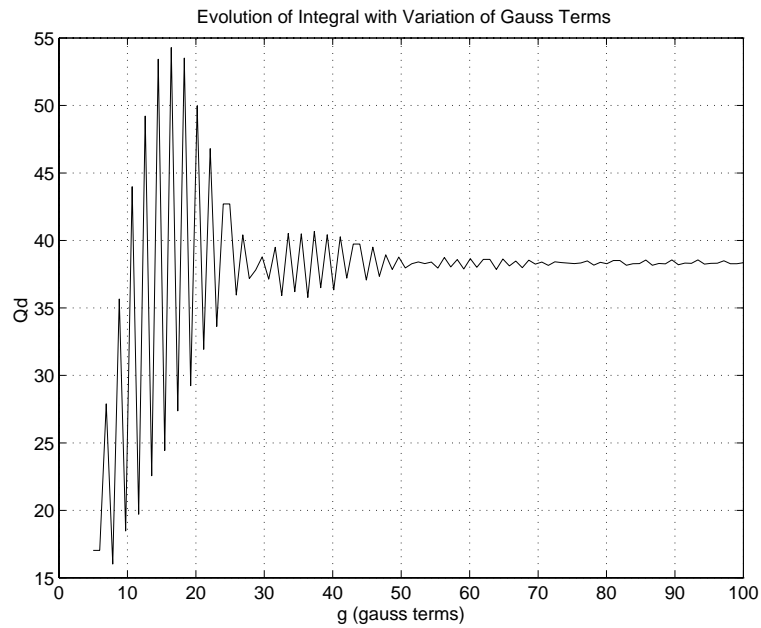


**Figura 15: Limites da Integral  $\times t_d$**

A integral infinita é calculada numericamente usando-se a regra de Gauss conforme Rabinowitz. Para cada valor de  $t_d$ , o integrando a ser considerado varia e pode ser determinado, facilitando-se o cálculo da integral infinita. O cálculo da integral infinita é feito através do cálculo de uma integral finita cujos limites de integração são escolhidos conforme a precisão desejada no cálculo. Para tal, foi feito um programa, desenvolvido em *Matlab*, considerando os seguintes aspectos na evolução do cálculo da integral:

1. Variação do número dos termos de gauss;
2. Incremento da variável de integração;
3. Evolução da integral com a variação dos limites finitos;
4. Instabilidade da solução.

A análise destes aspectos e outros mais objetivam efetuar o cálculo com uma precisão adequada com o mínimo de esforço computacional possível, de forma a representar o cálculo da integral infinita utilizando-se para tal uma integral finita. Esta é uma tarefa complicada, principalmente quando se trata do cálculo de funções envolvendo funções oscilantes como é o



**Figura 16: Evolução da Integral com a Variação do Número de Termos da Quadratura**

caso das funções de Bessel. A função finita utilizada tem a seguinte forma:

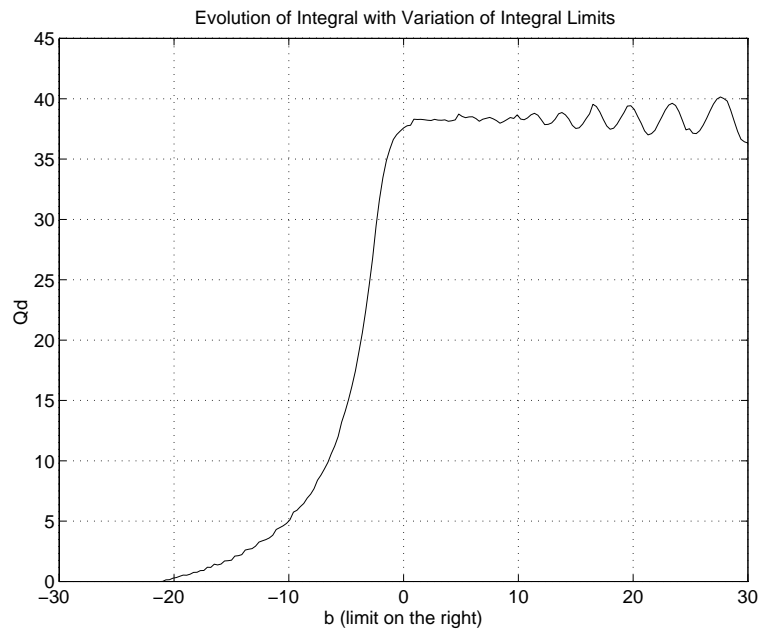
$$Q_d(t_d) = \frac{4}{\pi^2} \int_a^b \frac{(1 - \exp^{-t_d \cdot \exp^{2\alpha}})}{(J_0^2(\exp^\alpha) + Y_0^2(\exp^\alpha)) \exp^{2\alpha}} d\alpha \quad (4.40)$$

onde  $a$  e  $b$  são os limites de integração adotados. Conforme a Figura 16, apresentada por Barreto et al [22], a integral varia com o número de termos utilizados na quadratura, convergindo após um determinado valor. Quanto maior for o intervalo, mais termos serão necessários para se obter a convergência e estimar os resultados com a precisão desejada.

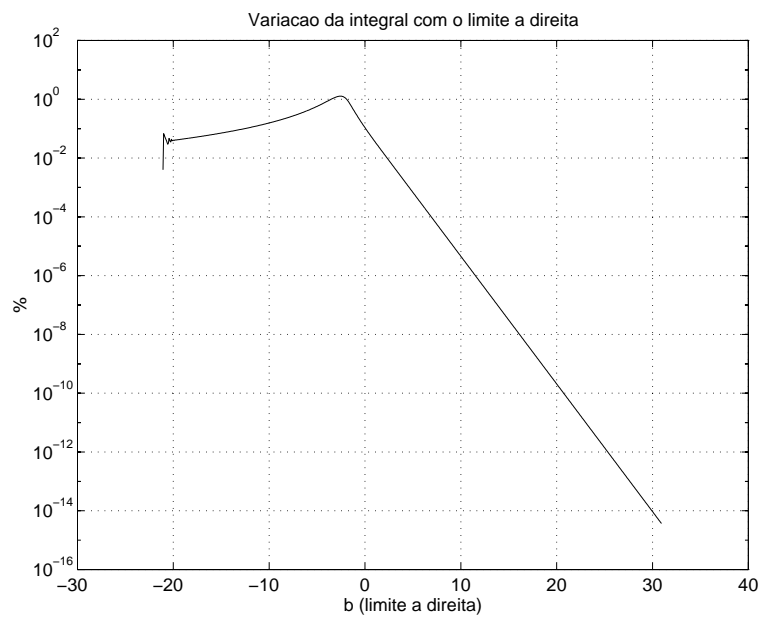
Quanto as extremidades, a função se comporta diferentemente, caindo logo a zero à esquerda e assintoticamente também a zero à direita. A evolução da integral com o avanço do limite à direita é mostrado no gráfico da Figura 17, conforme publicação de Barreto et al. [22], e sua representação percentual pode ser vista na Figura 18.

O cálculo numérico da integral fica vinculado a mais dois parâmetros: número de termos da quadratura e intervalo considerado, os quais variam de forma proporcional; isto é, ao aumentarmos o intervalo considerado ao cálculo, maior deverá ser o número de termos necessários para obter a convergência com a precisão desejada. Fixando-se um intervalo, calculamos o valor da integral com a precisão desejada, aumentando-se o número de termos até o valor desejado.

Os resultados do cálculo de  $Q_d$ , conforme expressão (4.38), são apresentados na Figura 19,

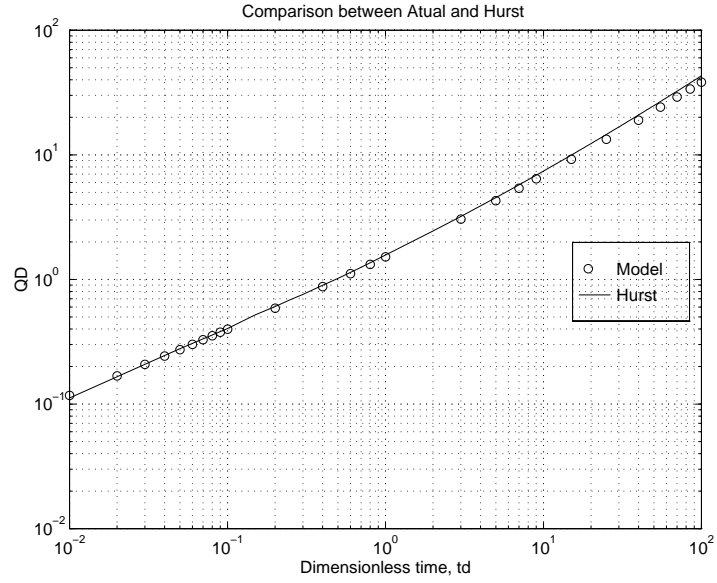


**Figura 17: Evolução da Integral com a Variação do Limite Superior**



**Figura 18: Evolução Percentual do Cálculo da Integral com a Variação do Limite Inferior**

conforme Barreto et al[22], onde são comparados com a tabela de Hurst e Van-Everdingen [26] para um modelo semelhante, cuja solução foi obtida utilizando-se transformações integrais.



**Figura 19: Comparação com os Resultados de Hurst**

#### 4.1.4 Modelagem no Tempo

O modelamento no tempo permite o cálculo da queda de pressão para diferentes intervalos de tempo. Isto é feito através do princípio da superposição aplicado ao tempo. Nesta aplicação a solução anteriormente calculada é repetidamente utilizada para diferentes intervalos de tempo. Conforme Figura 20A, para cada tempo teremos o poço produzindo com pressão constante, ou com vazão constante(Figura 20B).

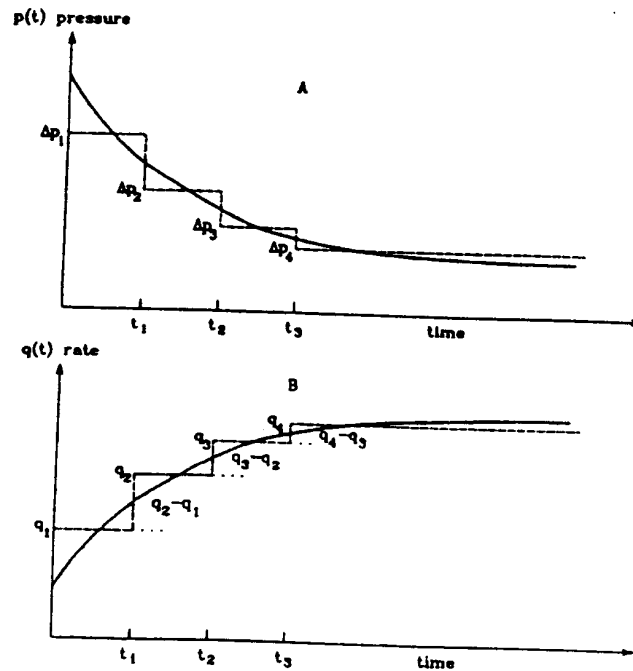


Figura 20: Modelos de Superposição no Tempo

Para  $n$  intervalos de tempo, o fluxo total no tempo  $n$  será:

$$Q(t) = C_1 \sum_{j=1}^n \Delta p_{wf} \cdot Q_d(t_d - t_{d_j}) \quad (4.41)$$

onde:

$$C_1 = 2\pi \cdot h \cdot c_t \cdot r_w^2 \quad (4.42)$$

Considerando intervalos de tempo constantes ( $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_n$ ), e para produção constante ( $Q = q_{TOT}$ ), teremos para a expressão (4.41), um sistema conforme a matriz



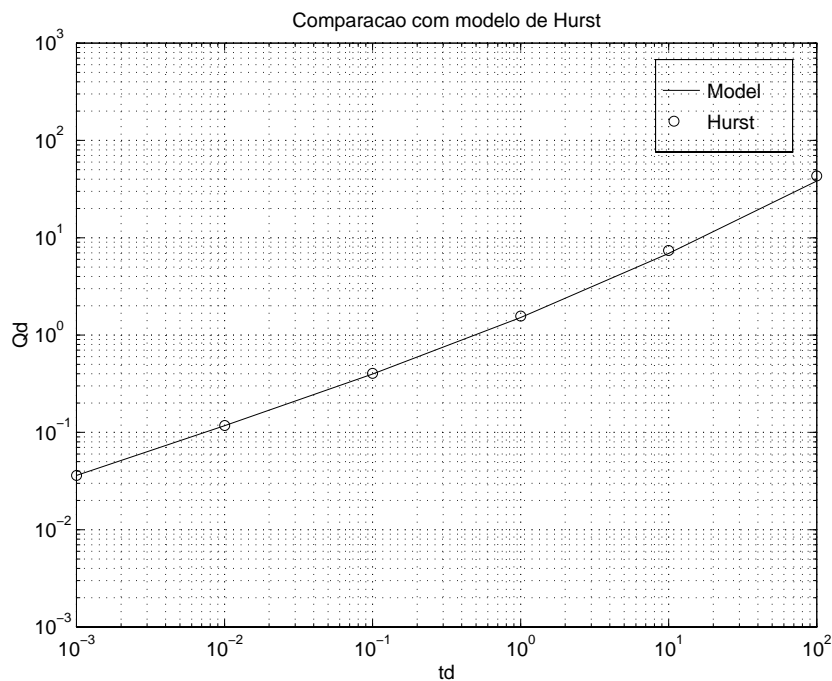
(4.43), que representa a solução do sistema.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & & & & & & \Delta p_{wf_1} & \bar{Q}_1 \\
 A_2 & A_1 & & & & & \Delta p_{wf_2} & \bar{Q}_2 \\
 A_3 & A_2 & A_1 & & & & \Delta p_{wf_3} & \bar{Q}_3 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & = \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 A_{n-1} & A_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_2 & A_1 & \Delta p_{wf_{(n-1)}} & \bar{Q}_{n-1} \\
 A_n & A_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_3 & A_2 & A_1 & \Delta p_{wf_n} & \bar{Q}_n
 \end{array} \tag{4.43}$$

onde;

$$A_{j=1:n} = Q_d(j \cdot \Delta t_d) \tag{4.44}$$

$$\bar{Q}_{j=1:n} = \frac{q_{tot}}{C_1} \cdot t_j \tag{4.45}$$



**Figura 21: Comparação com Hurst 1**

#### 4.1.5 Resultados

Historicamente, todo o desenvolvimento das equações para poços horizontais seguiram o desenvolvimento existente para poços verticais. É claro que alguns aspectos devem ser considerados. O aspecto de poço produzindo com pressão constante não foi tão bem desenvolvido como o modelo de fluxo constante mesmo para poços verticais, isto se deve ao fato do modelo de pressão constante no poço ter o significado físico mais realista quando estamos trabalhando com poços horizontais, portanto nos concentramos em trabalhar com o modelo de pressão constante no poço.

O modelo de Hurst e Van Everdingen, anteriormente citados, são muito utilizados e representam o caso de poço produzindo com pressão constante, quando estamos trabalhando com poço vertical em um reservatório isotrópico de extensão infinita (fluxo radial). O desenvolvimento matemático é feito por transformadas de Laplace consecutivas e a expressão final é calculada e tabelada utilizando-se expressões aproximadas.

Nas Figuras 21 a 24, fazemos comparações entre a solução desenvolvida neste trabalho e por Hurst. Podemos verificar que para tempos iniciais os resultados são mais coerentes do que para tempos maiores, onde as expressões aproximadas por Hurst não refletem adequadamente o cálculo da integral.

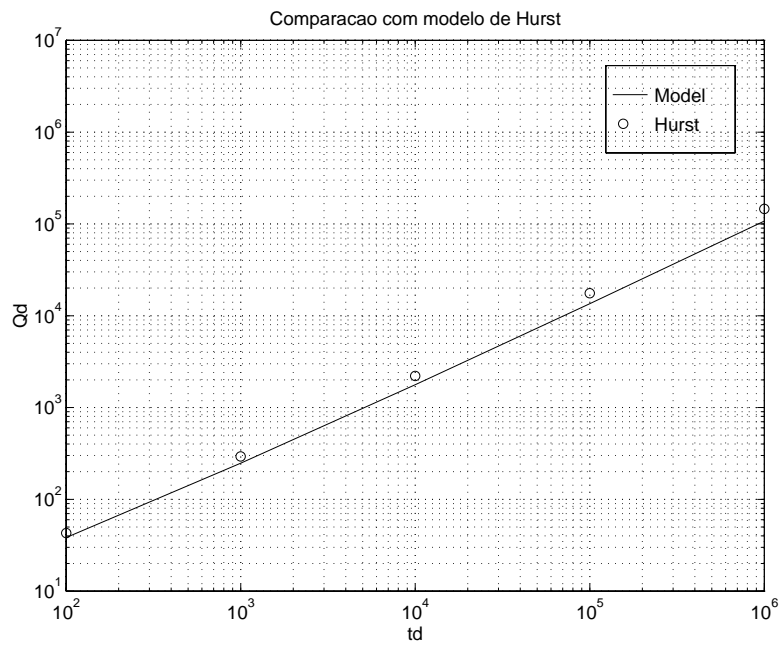


Figura 22: Comparação com Hurst 2

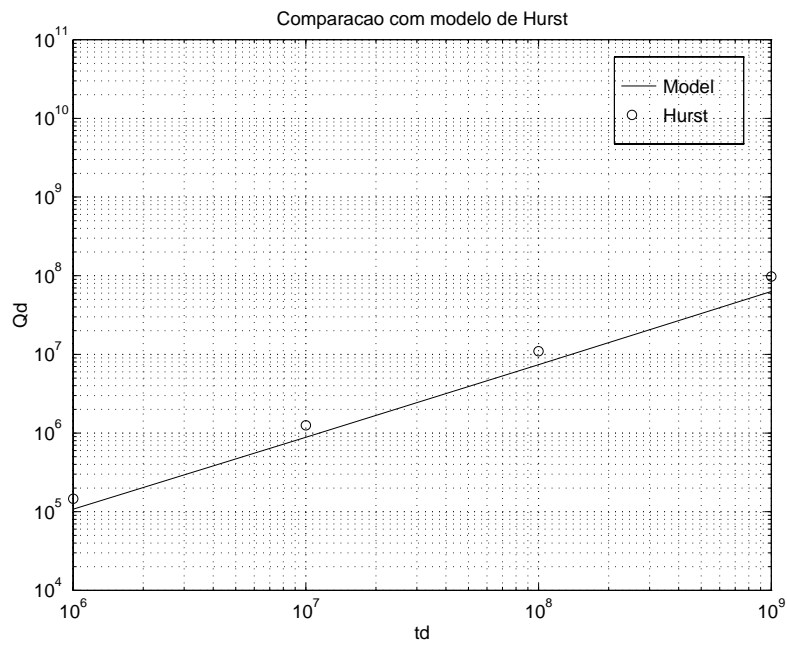
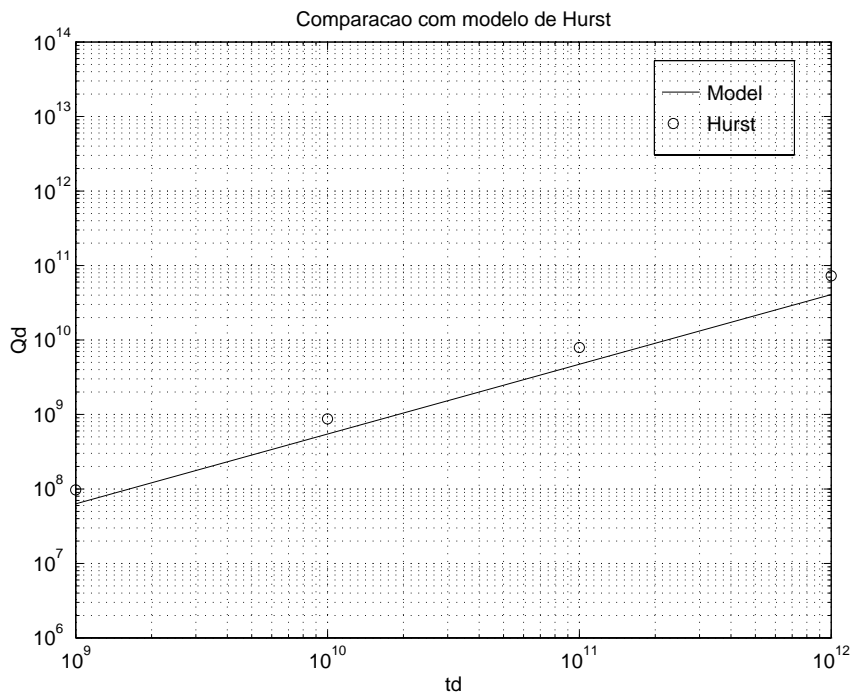


Figura 23: Comparação com Hurst 3



**Figura 24: Comparação com Hurst 4**

Na Figura 25, conforme Barreto et al [22], mostramos nossos resultados comparados com Hurst e um simulador comercial.

Na Figura 26 verificamos que percentualmente as diferenças crescem e atingem valores consideráveis, podendo ocasionar erros de até 20% ou mais de acordo com os parâmetros que formam  $t_d$ . Sabemos que para poço horizontal o fluxo radial só existe nos tempos iniciais, o que reduz mas não elimina a possibilidade de erros. No entanto, para poços verticais a situação é muito mais grave.

Na Figura 27, conforme Barreto et al [22], observamos que os nossos resultados para  $\Delta p = p_i - p_{wf}$  mostram-se em excelente acordo com aqueles devido a Babu [5].

Os resultados quando comparados com Hurst divergem para valores de  $t_d$  grandes, resta-nos então saber qual dos valores melhor representa o modelo proposto. Sendo assim, mostramos a contribuição percentual na evolução do cálculo da integral. Isto pode ser visto nas Figuras 28 a 34 onde vemos que o cálculo da integral converge rapidamente. A contribuição percentual chega a  $10^{-10}$  e a variação do valor calculado é de  $10^{-8}$ .

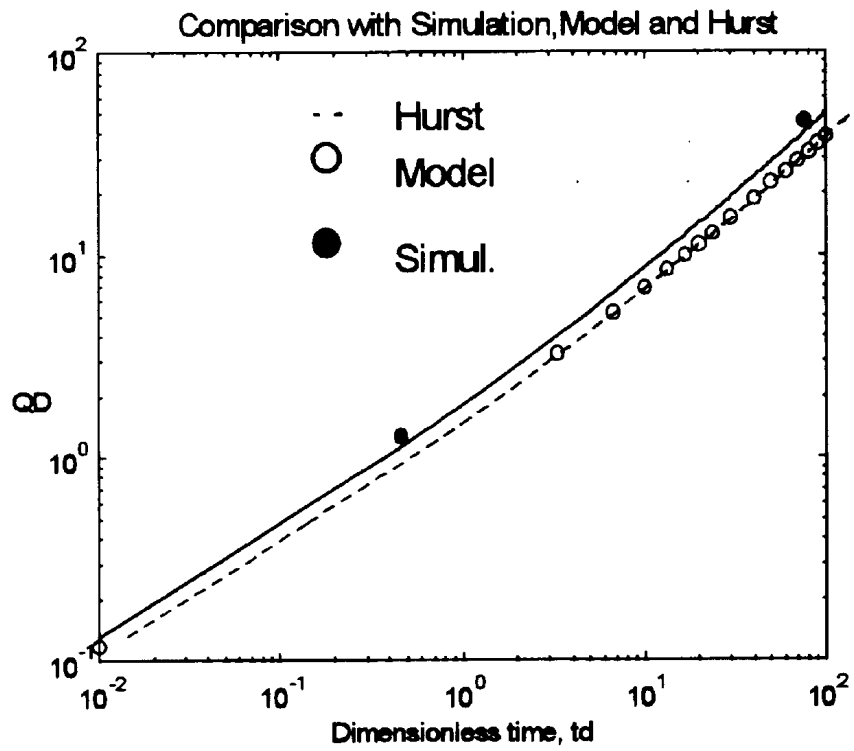


Figura 25: Comparação com Hurst e Simulador

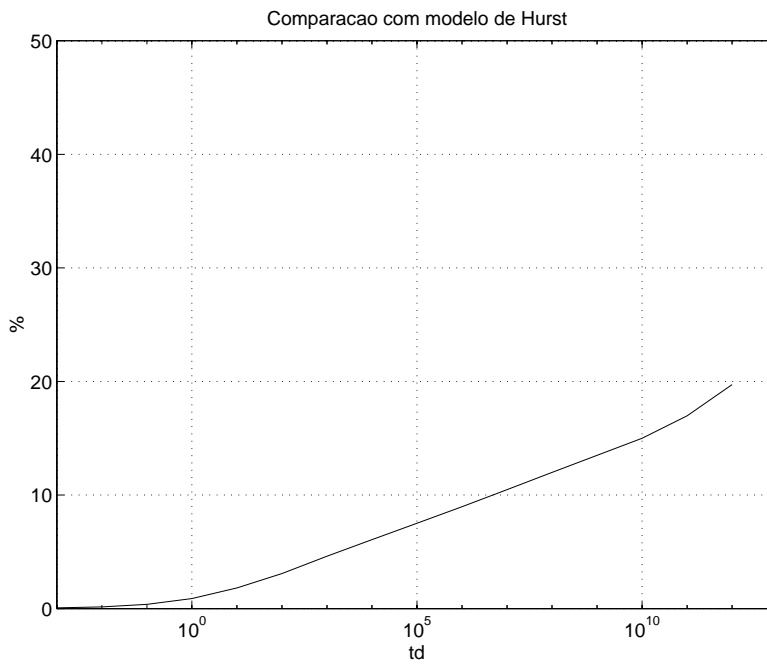


Figura 26: Comparação Percentual com Hurst

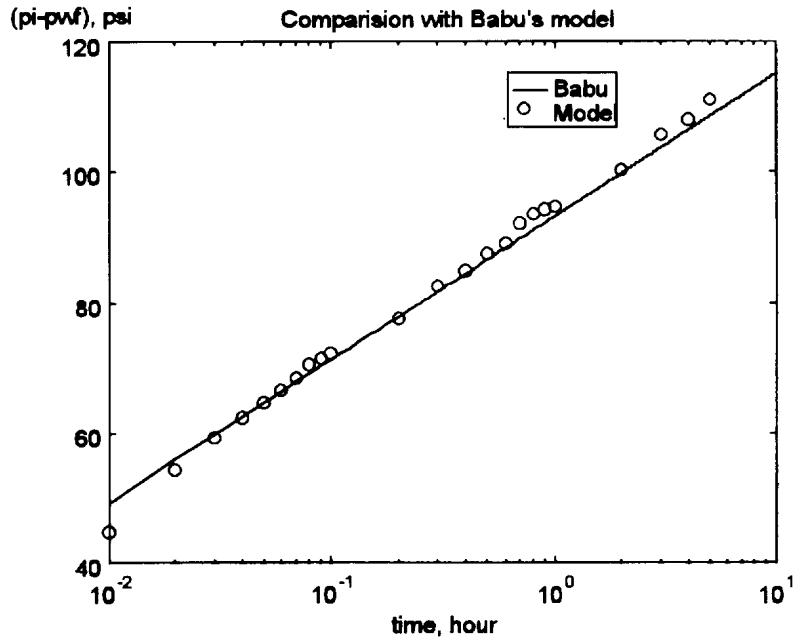


Figura 27: Comparação com Babu

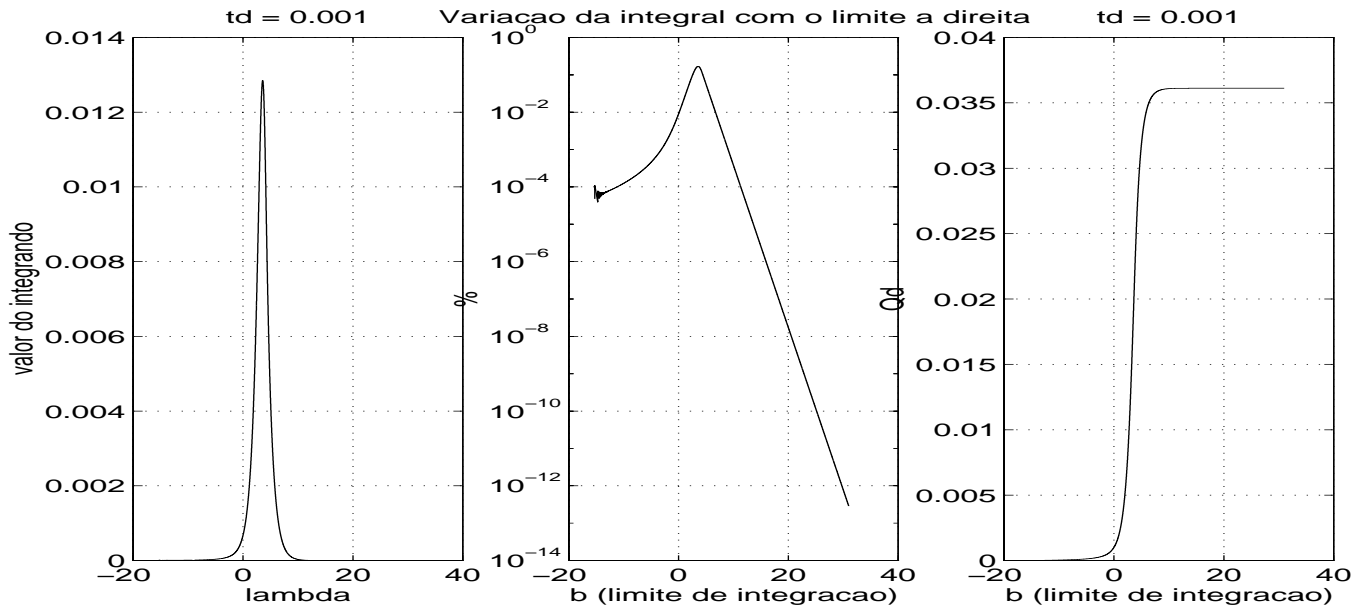


Figura 28: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 0.001$

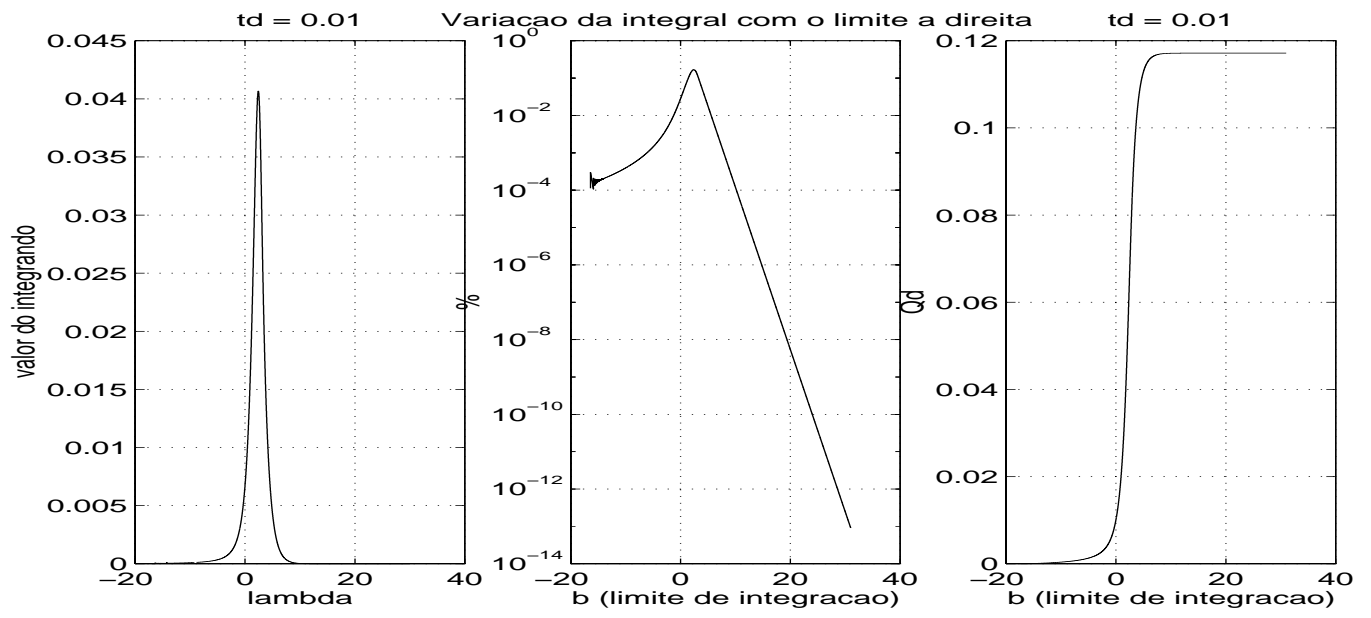


Figura 29: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 0.01$

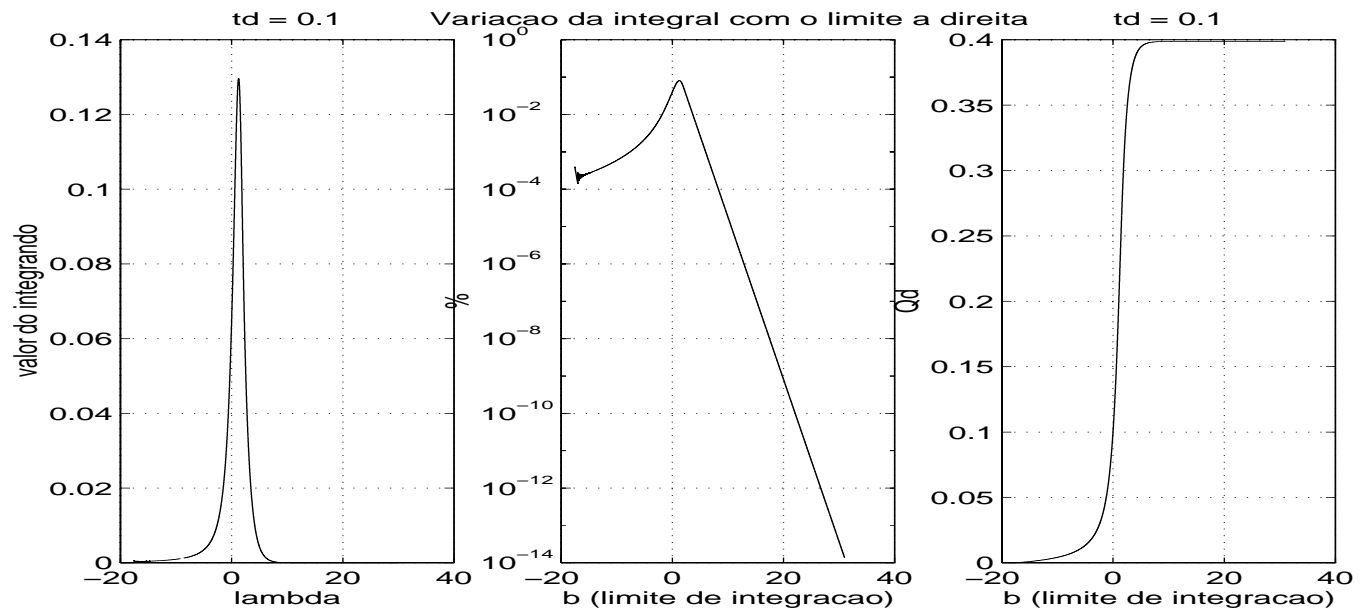


Figura 30: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 0.1$

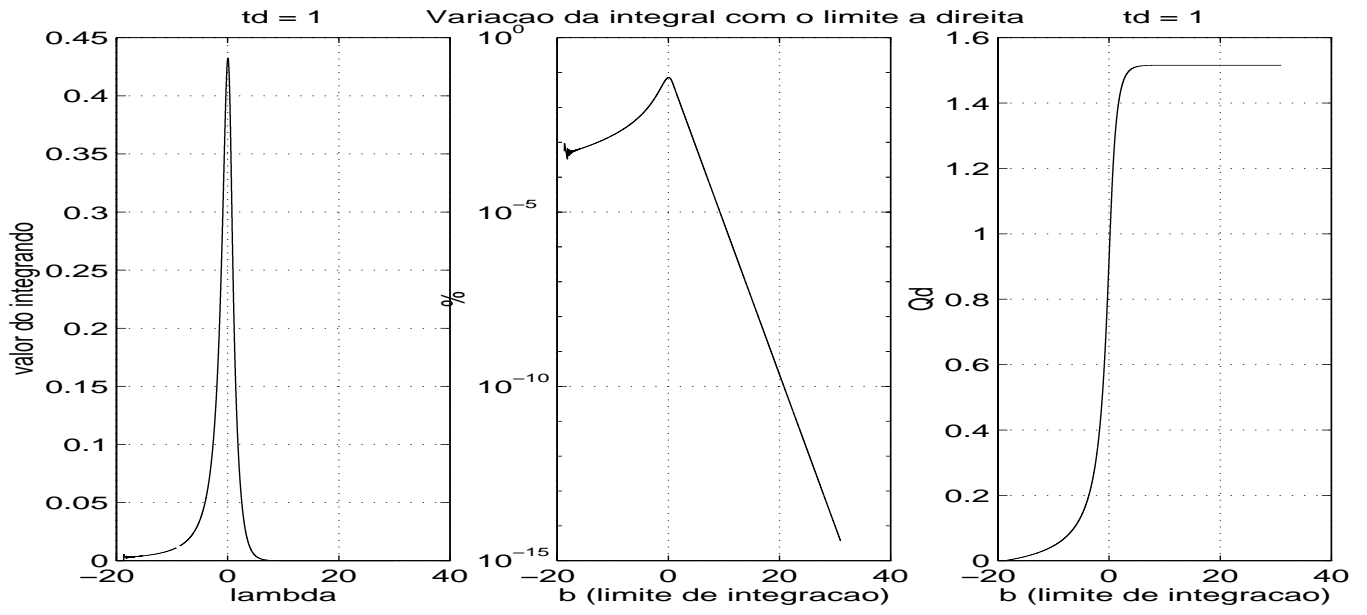


Figura 31: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 1$

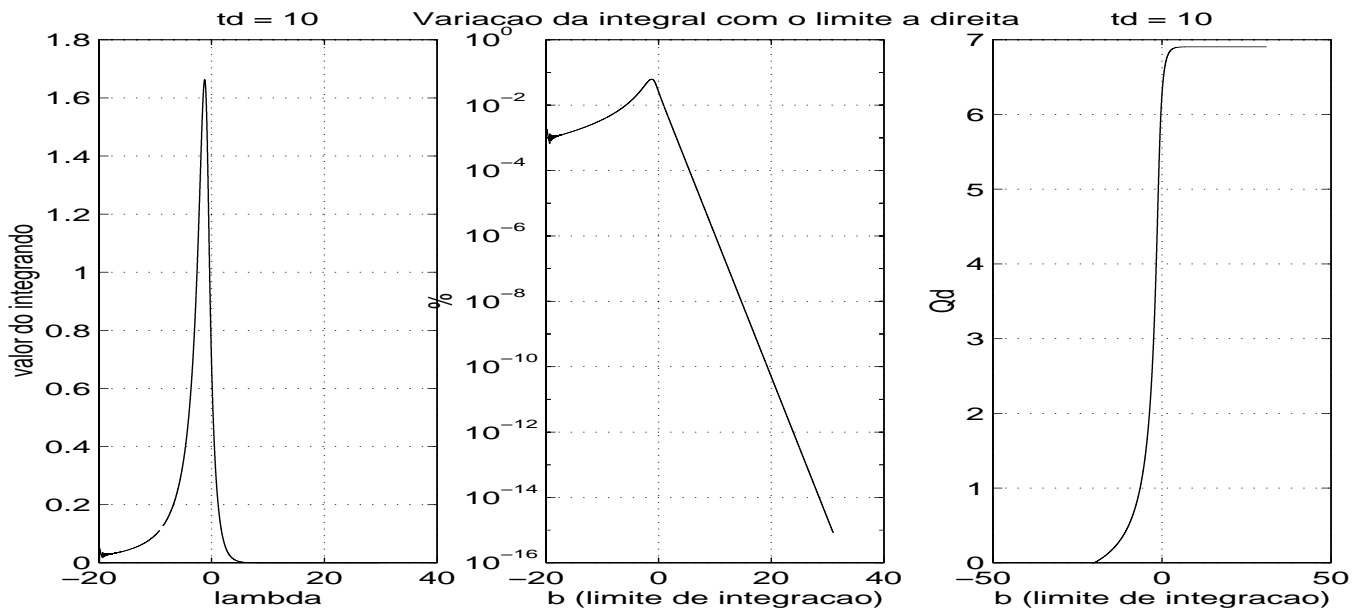


Figura 32: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 10$



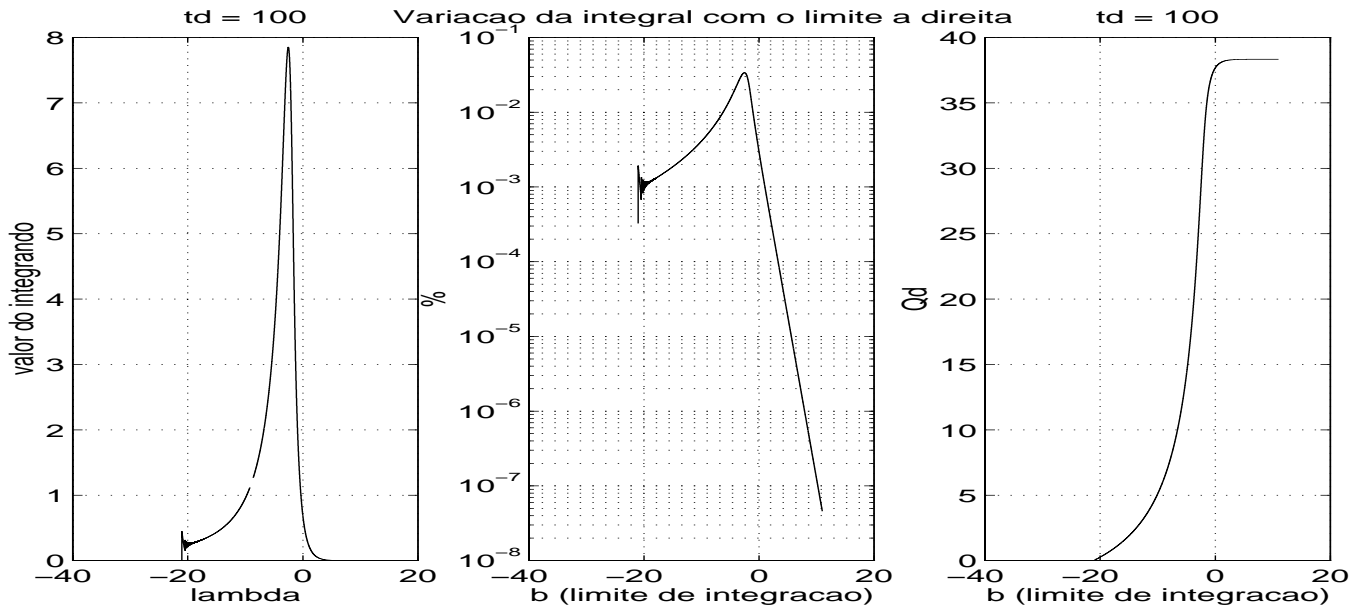


Figura 33: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 100$

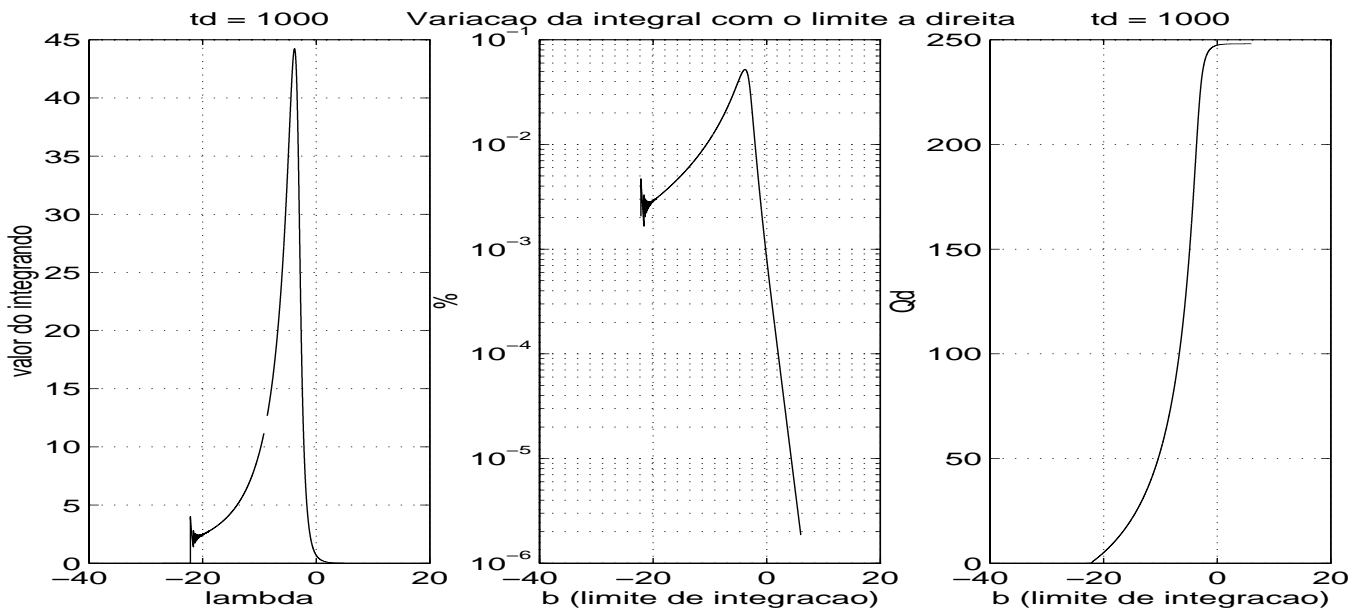


Figura 34: Cálculo de  $Q_d$  para  $t_d = 1000$

## 4.2 Reservatório Cilíndrico Selado

Quando o contorno externo do reservatório é selado seja por uma fratura ou por uma outra razão, teremos como condição de contorno externa a expressão (2.32):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (4.46)$$

Para um cilindro com dimensão axial infinita, teremos a equação da difusão na forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{k}{\phi \mu c_t} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.47)$$

Utilizando os parâmetros adimensionais conforme expressões (4.20) a (4.22), teremos a equação da difusividade na forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 p_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial p_d}{\partial r_d} = \frac{\partial p_d}{\partial t_d} \quad (4.48)$$

Escrevendo as condições inicial e de contorno na forma adimensional, temos:

$$p_d = 0 \quad \text{para } t_d = 0 \quad (4.49)$$

$$p_d = 1 \quad \text{para } r_d = 1 \quad (4.50)$$

para  $p_{wf}$  constante.

$$\left(\frac{\partial p_d}{\partial r_d}\right) = 0 \quad \text{para } r_d = \frac{r_{ext}}{r_w} \quad (4.51)$$

### 4.2.1 Derivação das Equações de Pressão

Considerando o domínio  $\mathcal{D} = \{(\vec{r}, t) | r_w \leq r \leq r_{ext}, t \geq 0\}$ , temos o desenvolvimento da solução para um problema da seguinte forma:

Definindo a equação da difusividade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (4.52)$$

Satisfazendo a condição inicial:

$$u = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (4.53)$$

e condições de contorno:

$$u = u_0 \quad \text{para } r = r_w \quad (4.54)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (4.55)$$

Para construção da solução do problema (4.52) a (4.55), consideraremos o sistema de coordenada polar  $(r, \varphi)$  e o uso do método da Função de Green.

Devido ao fato das funções de nosso problema não dependerem da variável ângulo, podemos considerar nossa função somente dependente das variáveis  $r, t$ :

$$u = u(r, t) \quad (4.56)$$

Para solução deste problema é mais conveniente representarmos a função  $u$  na seguinte forma:

$$u(r, t) = v(r, t) + u_0 \quad (4.57)$$

e considerar o problema  $u(r, t)$ , o qual terá condições de contorno homogêneas:

$$v = 0 \quad \text{para } r = r_w \quad (4.58)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (4.59)$$

e condição inicial não-homogênea:

$$v = -u_0 \quad \text{para } t = 0 \quad (4.60)$$

A solução deste problema aplicando-se a teoria de funções de Green conforme expressão (3.10) se reduz somente a um termo, pois os outros são nulos:

$$v(r, t) = -\frac{u_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}_0} d\bar{r}_0 G(r, t|r_0, 0) \quad (4.61)$$

onde  $\mathcal{D}_0 = \{\bar{r}|r_w \leq r \leq r_{ext}\}$ .

No sistema de coordenadas polares, a última integral pode ser representada na forma:

$$v(r, t) = -\frac{u_0}{4\pi} 2\pi \int_{r_w}^{r_{ext}} G(r, t|r_0, 0) r_0 dr_0 = \quad (4.62)$$

Utilizando-se a função (C.22) desenvolvida no Apêndice C (funções de Green para reservatório cilíndrico selado):

$$= -u_0 \int_{r_w}^{r_{ext}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{r_{ext}^2}\right) R_n(r) R_n(r_0) r_0}{\|R_n\|^2} dr_0 = \quad (4.63)$$

$$-u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{r_{ext}^2}\right) R_n(r) R_n(r_0) r_0}{\|R_n\|^2} \int_{r_w}^{r_{ext}} R_n(r_0) r_0 dr_0 \quad (4.64)$$

Trabalhando as integrais temos:

$$\int_{r_w}^{r_{ext}} R_n(r) r dr = \int_{r_w}^{r_{ext}} r \left\{ J_1(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_{ext}}\right) - Y_1(\lambda_n) J_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_{ext}}\right) \right\} dr \quad (4.65)$$

Para  $x = \frac{\lambda_n r_0}{r_{ext}}$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_{r_w}^{r_{ext}} R_n(r) r dr_0 &= \left(\frac{r_{ext}}{\lambda_n}\right)^2 \int_{\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}}^{\lambda_n} x \left\{ J_1(\lambda_n) Y_0(x) - Y_1(\lambda_n) J_0(x) \right\} dx \\ &= \left(\frac{r_{ext}}{\lambda_n}\right)^2 \left\{ J_1(\lambda_n) Y_1(x) - Y_1(\lambda_n) J_1(x) \right\}_{x=\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}}^{x=\lambda_n} \\ &= \left(\frac{r_{ext}}{\lambda_n}\right)^2 \left\{ Y_1(\lambda_n) J_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) - J_1(\lambda_n) Y_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) \right\} \cdot \frac{\lambda_n a}{b} \\ &= \frac{r_w r_{ext}}{\lambda_n} \left\{ Y_1(\lambda_n) J_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) - J_1(\lambda_n) Y_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \|R_n\|^2 &= \int_{r_w}^{r_{ext}} R_n^2(r) r dr = \\ &\frac{r_w}{2} \left[ J_1(\lambda_n) Y_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) - J_1\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) J_1(\lambda_n) \right] \cdot \\ &\left[ J_0(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) - J_0(\lambda_n) J_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Conseqüentemente, a solução pode ser escrita na forma:

$$v(r, t) = -2 u_0 r_{ext} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{r_{ext}^2}\right) R_n(r)}{\lambda_n \left[ J_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) \right]} \quad (4.68)$$

que numericamente é mais conveniente.

Para o problema inicial definido nas expressões (4.52) a (4.55), aplicando-se a equação (4.57), teremos a seguinte solução:

$$u(r, t) = u_0 \left\{ 1 - 2 r_{ext} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t}{r_{ext}^2}\right) R_n(r)}{\lambda_n \left[ J_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r_w}{r_{ext}}\right) \right]} \right\} \quad (4.69)$$

Analogamente, para o problema descrito nas expressões (4.48) a (4.51) teremos como solução:

$$p_d(r_d, t_d) = \left\{ 1 - 2 r_{de} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_n^2 t_d}{r_{de}^2}\right) R_n(r_d)}{\lambda_n \left[ J_0\left(\frac{\lambda_n}{r_{de}}\right) Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n}{r_{de}}\right) \right]} \right\} \quad (4.70)$$

onde:  $r_{de} = \frac{r_{ext}}{r_w}$ ;

$$R_n(r_d) = J_1(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r_d}{r_{de}}\right) - Y_1(\lambda_n) J_0\left(\frac{\lambda_n r_d}{r_{de}}\right) \quad (4.71)$$

sendo  $\lambda_n$  as raízes positivas da expressão (4.71):

$$\lambda_n : R(\lambda) = 0 \sim J_1(\lambda) Y_0\left(\frac{\lambda}{r_{de}}\right) - Y_1(\lambda) J_0\left(\frac{\lambda}{r_{de}}\right) = 0 \quad (4.72)$$

Tendo a solução do problema conforme a expressão (4.70), o problema está em encontrar as raízes positivas ( $\lambda_n$ ), conforme expressão (4.72).

Para valores pequenos de  $r_{de}$ ,  $r_{de} < 1$  encontra-se desenvolvidas na literatura expressões analíticas para o cálculo dessas raízes. No entanto para valores grandes de  $r_{de}$  essas expressões não são adequadas. Por definição,  $r_{de} > 1$ . Logo, foi necessário desenvolver um procedimento para o cálculo dessas raízes. O procedimento desenvolvido é mostrado no apêndice **D**, onde com o auxílio de um programa, implementado em *Matlab*, pode-se calcular todas as raízes dentro de um intervalo considerado para qualquer valor de  $r_{de}$ . O cálculo das raízes é feito utilizando-se o método de Newton.

## 4.2.2 Derivação das Equações de Fluxo

Conforme desenvolvimento das equações de fluxo para reservatório infinito, temos a expressão (4.25) como solução do problema:

$$Q(t) = 2\pi h \phi c_t r_w^2 \Delta p_{wf} Q_d(t_d) \quad (4.73)$$

onde:

$$Q_d(t_d) = \int_0^{t_d} \left( \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right)_{r_d=1} dt_d \quad (4.74)$$

Para  $p_d$  conforme expressão (4.70), temos que  $Q_d(t_d)$ :

$$Q_d(t_d) = -2r_{de} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{t_d} \exp^{-\frac{\lambda_n^2 t_d}{r_{de}^2}} dt_d \left( \frac{\partial}{\partial r_d} (R_n(r_d)) \right)_{r_d=1}}{\lambda_n [J_0(\frac{\lambda_n}{r_{de}}) Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) Y_0(\frac{\lambda_n}{r_{de}})]} \quad (4.75)$$

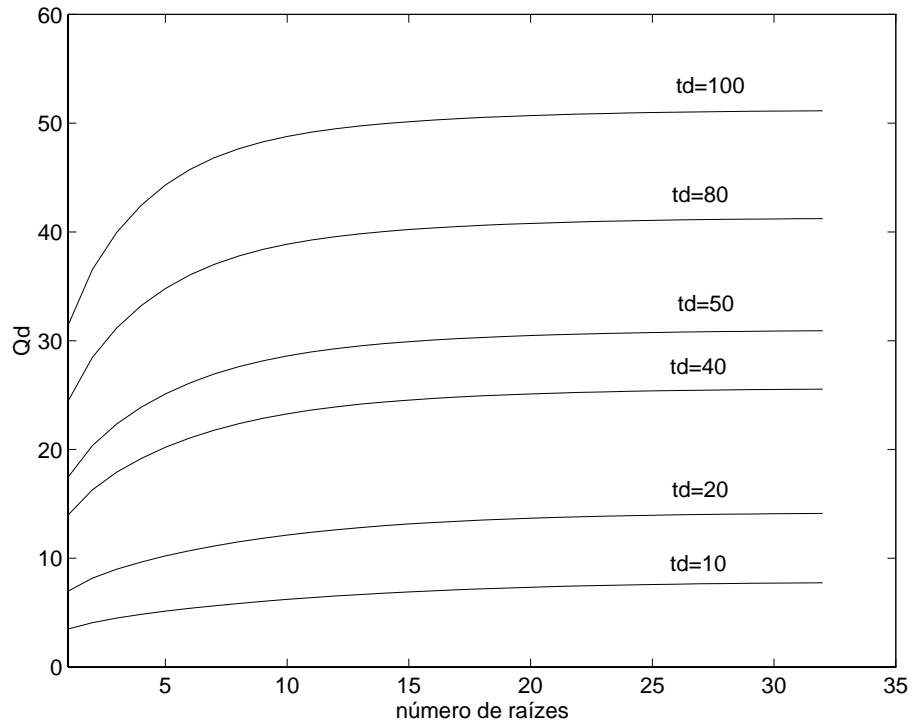
ou

$$Q_d(t_d) = -2r_{de} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \exp^{-\frac{\lambda_n^2 t_d}{r_{de}^2}}) [J_1(\lambda_n) Y_1(\frac{\lambda_n}{r_{de}}) - Y_1(\lambda_n) J_1(\frac{\lambda_n}{r_{de}})]}{\lambda_n^2 [J_0(\frac{\lambda_n}{r_{de}}) Y_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) Y_0(\frac{\lambda_n}{r_{de}})]} \quad (4.76)$$

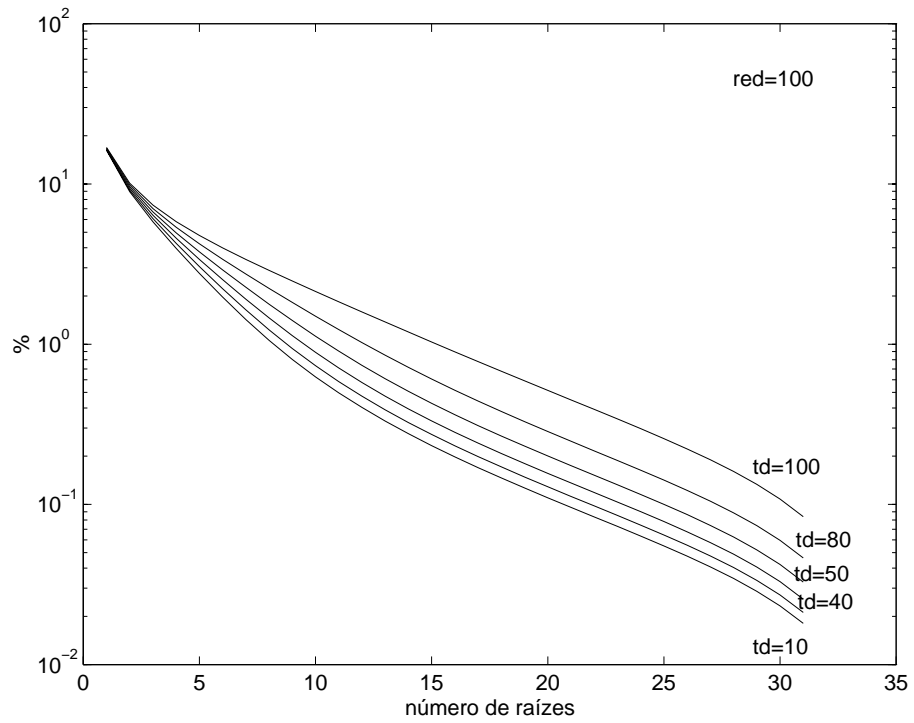
## 4.2.3 Resultados

O cálculo de  $Q_d$  pode ser visto nas Figuras 35 e 36 onde mostramos a evolução do cálculo do somatório ao variarmos o número de raízes utilizadas, concluímos assim que o somatório converge rapidamente.

A Figura 37 mostra  $Q_d$  contra tempo onde podemos observar claramente os efeitos dos contornos selados. Podemos observar ainda que os resultados estão em excelente acordo com os de Hurst, o que nos faz concluir que a função de Green calculada é válida.



**Figura 35: Evolução do Cálculo de  $Q_d$  para Reservatório Cilíndrico Selado com  $r_{de} = 100$**



**Figura 36: Evolução Percentual do Cálculo de  $Q_d$  para Reservatório Cilíndrico Selado com  $r_{de} = 100$**

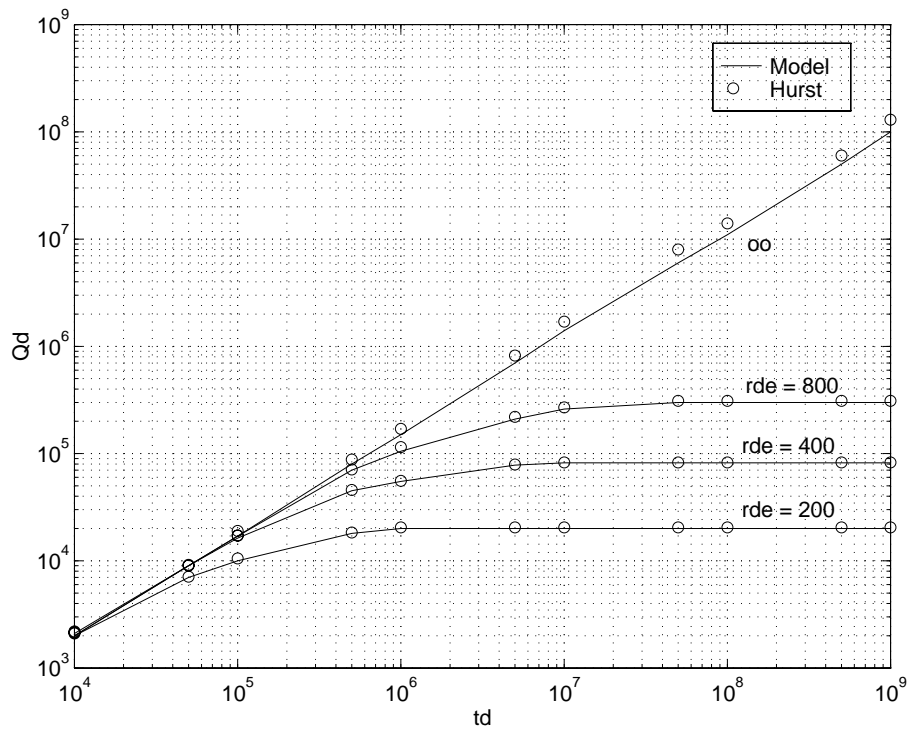


Figura 37: Evolução de  $Q_d$  com  $td$ , e Comparação com Hurst



## Capítulo 5

# Reservatório 3D

Neste capítulo fizemos uma comparação de autores que utilizam o modelo desenvolvido por Gringarten et al[4], onde a teoria de uma forma mais detalhada pode ser examinada. Este modelo considera o reservatório como um bloco no formato de um cubo, com as extremidades seladas ao fluxo ou mantidas a uma pressão conhecida conforme condições de contorno específicas. O poço é uma série de fontes pontuais produzindo sob determinadas condições. O desenvolvimento da solução da equação da difusividade é feito pela aplicação dos teoremas de Green anteriormente explicitado. A metodologia é bastante simples e segue uma sequência que pode assim ser resumida:

1. Desenvolvimento de funções de Green para reservatório infinito unidimensional;
2. Desenvolvimento das funções fontes instantâneas básicas;
3. Aplicação do Método das imagens e construção das fontes instantâneas básicas para reservatório unidimensional finito, conforme condições de contorno do problema em questão.
4. Aplicação do método dos produtos e integração com respeito ao tempo, e com respeito à dimensão espacial na direção do poço.

## 5.1 Funções Fonte e Funções de Green Instantâneas

Na aplicação da teoria de funções de Green para problemas de escoamento de fluidos no regime não-permanente, é conveniente introduzir funções fonte, obtidas integrando-se a função de Green sobre o volume da fonte. Considerando a forma clássica de definição da função de Green e definindo o problema conforme equação da difusividade para reservatório isotrópico, temos:

$$\eta \nabla^2 p(M, t) - \frac{\partial p(M, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.1)$$

A solução  $p(M, t)$  da equação da difusividade é determinada descrevendo-se:

1. Distribuição de pressão inicial em  $\mathcal{D}$ ;
2. O valor do fluxo que atravessa o contorno (condição de Newman), a pressão (condição de Dirichlet) no contorno  $\mathcal{S}$ , ou ambos (fluxo em um e pressão no outro).

A função de Green instantânea para o domínio  $\mathcal{D}$  com respeito a equação da difusão (expressão 5.1) é definida como a pressão que seria criada no ponto  $M'(x', y', z')$ , no tempo  $t$ , por uma fonte fictícia instantânea de potencial unitário gerada no ponto  $M(x, y, z)$  no tempo  $\tau$ , sendo  $\tau < t$ , a pressão em todo o domínio  $\mathcal{D}$  estando inicialmente na pressão zero, e a superfície  $\mathcal{S}$  estando impermeável ao fluxo ou sob pressão nula.

A função de Green instantânea, representada por  $G(M, M', t - \tau)$  é uma função de dois pontos tendo as seguintes propriedades:

1. Ela é a solução da equação da difusão adjunta. Se  $L[\nu]$  representa a equação da difusão na forma diferencial, a forma diferencial adjunta  $M[\mu]$  é definida de tal forma que a expressão  $(\mu L[\nu] - \nu M[\mu])$  seja integrável. Para a equação da difusão então:  $L = (\eta \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t})$ , e a forma adjunta é  $M = (\eta \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial t})$ ,  $\tau < t$ ;
2. Ela é simétrica em relação aos pontos  $M$  e  $M'$ ;
3. É uma função delta. Ela desaparece em todos os pontos dentro do contorno  $\mathcal{S}$  quando  $t \rightarrow \tau$ , exceto no ponto  $M$ , onde torna-se infinito. Para uma função contínua  $f(M)$ , teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{\mathcal{D}} f(M') G(M, M', t - \tau) dM' = f(M) \quad (5.2)$$

Portanto, por definição de uma fonte potencial unitária instantânea, a função de Green instantânea também satisfaz a:

$$\int_{\mathcal{D}} G(M, M', t) dM' = 1 \quad (5.3)$$

em todos os tempos  $t \geq 0$ ;

4. Se a pressão é conhecida no contorno externo, então a função de Green desaparece quando  $M$  está no contorno  $\mathcal{S}$ . Se o fluxo é constante em  $\mathcal{S}$ , a derivada da função de Green é zero. Se o domínio  $\mathcal{D}$  é o infinito, a função de Green será zero quando  $M \rightarrow \infty$ .

## 5.2 Fontes Fluxo Uniforme

Considerando a pressão inicial do reservatório uniforme e igual a constante  $p_i$ , então:

$$\Delta p(M, t) = p_i - p(M, t) \quad (5.4)$$

Assumindo que o fluxo é uniforme sobre o volume da fonte e que o reservatório é infinito, analisando a expressão (3.10) temos que a queda de pressão em  $M$  é então dada por:

$$\Delta p(M, t) = \frac{1}{\phi c} \int_0^t q(\tau) S(M, t - \tau) d\tau \quad (5.5)$$

onde:

$$S(M, t) = \int_{D_w} G(M, M_w, t) dM_w \quad (5.6)$$

é a fonte de fluxo uniforme instantânea para o sistema fonte-reservatório. Integrando-se o lado direito da equação (5.6) com respeito a variável  $t$ , obteremos a função fonte contínua.

## 5.3 Método de Newman

A dificuldade em encontrar a função de Green apropriada para um problema tri-dimensional é grande. Newman [19] porém mostrou que, para certos tipos de condições iniciais e de contorno, a solução do problema de condução do calor tri-dimensional é igual ao produto de

soluções de três problemas uni-dimensionais. Carslaw e Jaeger [17] discutiram este método para condições de contorno mais gerais. A solução dos produtos são válidas se o produto das condições de contorno e das condições iniciais para problemas uni-dimensionais resultam nas condições iniciais e de contorno específicas aos problemas tri-dimensionais. Em particular, o método dos produtos de Newman é aplicável a funções fonte e de Green instantâneas.

## 5.4 Fontes Instantâneas Básicas

As fontes instantâneas básicas são derivadas da função de Green instantânea para reservatório linear unidimensional infinito, a qual deriva da solução fundamental de Laplace para a equação da difusividade para sistemas lineares conforme expressão (5.1) é:

$$\eta_j \frac{\partial^2 p(j, t)}{\partial j^2} - \frac{\partial p(j, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.7)$$

sendo  $j = x, y$  ou  $z$ . O resultado é:

$$G(j, j', t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \eta_j t}} \exp \frac{-(j - j')^2}{4 \eta_j t} \quad (5.8)$$

A função fonte instantânea para uma fonte plana infinita localizada em  $j_w$  em um reservatório infinito é dado então por:

$$S(j, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \eta_j t}} \exp \frac{-(j - j_w)^2}{4 \eta_j t} \quad (5.9)$$

Para uma geometria tipo uma placa infinita com espessura  $j_f$ , a fonte de fluxo uniforme instantânea, que representa uma placa de fonte plana localizada no ponto  $j_w$ , pode então ser obtida integrando-se o lado direito da expressão (5.9) com respeito a variável  $j$ , com limites  $(j_w \pm \frac{j_f}{2})$ .

$$S(j, t) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{j - j_w + \frac{j_f}{2}}{2\sqrt{\eta_j t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{j - j_w - \frac{j_f}{2}}{2\sqrt{\eta_j t}} \right) \right] \quad (5.10)$$

Para reservatórios finitos com diversas condições de contorno, parte-se destas soluções aplicadas a reservatório infinito e com o método das imagens pode-se gerar outras fontes para diversos tipos de problemas (modelos). A soma algébrica das funções fontes e suas imagens correspondentes a reservatório infinito será a função fonte de reservatório finito com condições

de contorno específicas. A natureza da imagem determina o sinal da função fonte na soma algébrica, e depende das condições de contorno. A condição de fluxo constante é obtida com uma imagem da mesma natureza que a fonte, já a condição de pressão constante é obtida com uma imagem com sinal oposto ao da fonte. Dessas duas fontes instantâneas básicas, pode-se desenvolver as soluções para problemas tri-dimensionais através do método dos produtos (Newman). Então para o problema em três dimensões a solução da equação da difusividade se torna:

$$\Delta p = p_i - p(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{y_1}^{y_2} S_x S_y S_z dy_0 d\tau \quad (5.11)$$

onde

$S_x, S_y, S_z$  - São as funções fonte instantânea uni-dimensionais nas respectivas direções:  $x, y, e z$ ;

$y$  - direção do poço.

## 5.5 Algumas Funções Fluxo Uniforme

Definindo  $x = 0$  e  $x = x_e$  como sendo as extremidades de um reservatório unidimensional, e  $x_w$  como posição da fonte, teremos para fontes planas infinitas em um reservatório infinito as funções fonte na Tabela 1.

Considerando a fonte instantânea conforme expressão (5.10), temos para uma placa infinita com espessura  $x_f$ , sendo  $x_w$  o centro da placa, as funções placas infinitas conforme Tabela 2.

## 5.6 Modelo Fonte Condutividade Infinita

O modelo de condutividade infinita é obtido modelando-se o poço conforme Figura 38, onde a metade do comprimento do poço ( $L$ ) é dividida em  $M$  segmentos iguais, cada um com

$x = 0$	$x = x_e$	FUNÇÃO FONTE
fluxo constante	fluxo constante	$\frac{1}{x_e} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \cos \frac{n\pi x_w}{x_e} \cos \frac{n\pi x}{x_e} \right]$
pressão constante	pressão constante	$\frac{2}{x_e} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \sin \frac{n\pi x_w}{x_e} \sin \frac{n\pi x}{x_e}$
pressão constante	fluxo constante	$\frac{2}{x_e} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_x t}{4x_e^2}\right) \cos(2n+1) \frac{n\pi x_w}{x_e} \cos(2n+1) \frac{n\pi x}{x_e}$

**Tabela 1: Função Fonte Instantânea Básica para uma Fonte Plana Infinita em um Reservatório Infinito**

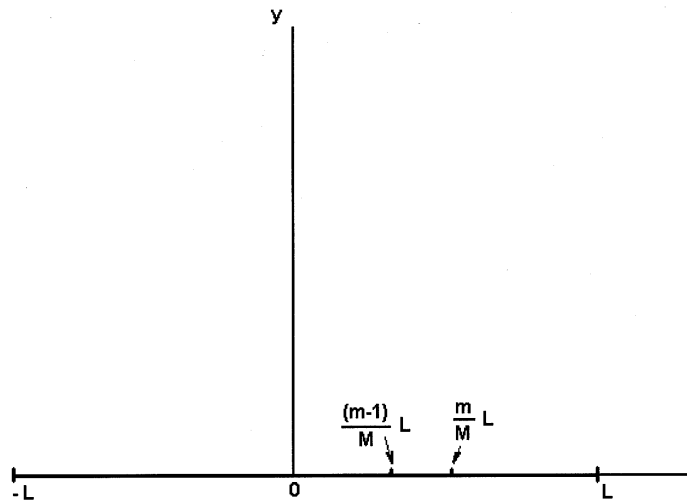
$x = 0$	$x = x_e$	FUNÇÃO FONTE
fluxo constante	fluxo constante	$\frac{x_f}{x_e} \left[ 1 + \frac{4x_e}{\pi x_f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \sin \frac{n\pi x_f}{2x_e} \cos \frac{n\pi x_w}{x_e} \cos \frac{n\pi x}{x_e} \right]$
pressão constante	pressão constante	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \sin \frac{n\pi x_f}{2x_e} \sin \frac{n\pi x_w}{x_e} \sin \frac{n\pi x}{x_e}$
fluxo constante	pressão constante	$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_x t}{4x_e^2}\right) \sin\left((2n+1) \frac{\pi x_f}{4x_e}\right) \cos\left((2n+1) \frac{n\pi x_w}{x_e}\right) \cos\left((2n+1) \frac{n\pi x}{x_e}\right)$

**Tabela 2: Função Fonte Instantânea Básica para uma Fonte Placa Infinita em um Reservatório Infinito**

fluxo uniforme por unidade de comprimento,  $q_m (m = 1, M)$ . Os valores de  $q_m$ , tais que a condição de condutividade infinita seja satisfeita, são determinados na resolução de um sistema de  $M$  equações. Esse sistema é montado igualando-se as pressões nos centros dos segmentos, o que fornece  $(M - 1)$  equações, e a última equação é obtida pela condição de vazão total de produção constante. Utilizando-se o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , temos o seguinte conjunto de equações:

$$\Delta p\left(x = \frac{2j - 1}{2M}L; y = r_w; z = z_w; t\right) = \Delta p\left(x = \frac{2j + 1}{2M}L; y = r_w; z = z_w; t\right) \quad (5.12)$$

$$2 \sum_{m=1}^M q_m \frac{L}{M} = q_w \quad (5.13)$$



**Figura 38: Poço Horizontal Dividido em Segmentos**

A queda de pressão no poço é obtida através do desenvolvimento da solução para fontes de fluxo uniforme conforme expressões (5.5) e (5.6).

A função de Green instantânea tridimensional utilizada é obtida através do método dos produtos (Newman), o qual faz o produto de três funções de Green instantâneas unidimensionais, ou seja a função de Green instantânea para o reservatório pode ser visualizada como sendo a interseção de funções para reservatórios unidimensionais.

Da mesma forma, a função fonte fluxo uniforme instantânea pode ser obtida pela interseção de fontes unidimensionais, o qual é igual ao produto das funções fonte instantâneas unidimensionais para cada direção.

	Contornos do Reservatorio				Modelo do POCO	Determinacao da Pressao	Regimes de Fluxo
	Base	Topo	Paralelos ao POCO	Perpend. ao POCO			
Daviau et al. (1985)	selado	selado	infinito	infinito	linear	pressao equiv. no ponto 0.7 L	Radial Vertical Pseudo-Radial
	selado	selado	selado	selado			
	selado	selado	pres. const.	pres. const.			
Clonts e Ramey (1986)	selado	selado	infinito	infinito	linear	pressao equiv. no ponto 0.732 L	Aproximacoes para tempos curtos e longos
Ozkan et al. (1987)	selado	selado	infinito	infinito	linear	pressao equiv. no ponto 0.732 L	Forma assintotica para tempos curtos e longos
Carvalho (1988)	selado	selado	infinito	infinito	linear	pressao equiv. no ponto 0.7 L	Forma assintotica para tempos curtos e longos
Babu e Odeh (1988)	selado	selado	selado	selado	linear	media do indice	Pseudo-Permanente
Odeh e Babu (1989)	selado	selado	selado	selado	linear	de produtividade	Radial Inicial, Linear Inicial,
Economides et al. (1994)	selado	selado	selado	selado	trajetoria	media do pOCO	Não descreve por Reg. de Fluxo

**Figura 39: Resumo das Principais Soluções Analíticas Desenvolvidas**

Esse produto gera uma função de Green correspondente a uma fonte instantânea puntiforme. A integração dessa fonte produz a fonte instantânea desejada que representa o poço horizontal.

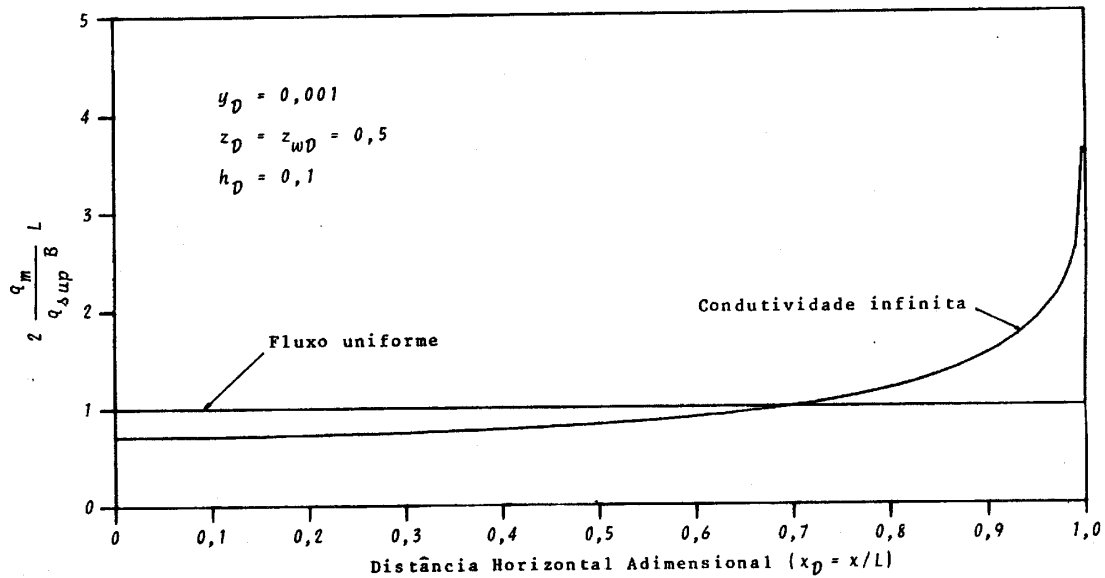
A distribuição de pressão é então conseguida aplicando-se a expressão (5.5):

$$\Delta p(x, y, z, t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t \left\{ \sum_{m=1}^M q_m(t') \int_{\frac{m-1}{M}L}^{\frac{m}{M}L} S_1(z, z_w, t-t') \cdot S_2(y, y_w, t-t') \cdot S_3(x, x_w, t-t') dx_w - \sum_{m=1}^M q_m(t') \int_{-\frac{m-1}{M}L}^{-\frac{m}{M}L} S_1(z, z_w, t-t') \cdot S_2(y, y_w, t-t') \cdot S_3(x, x_w, t-t') dx_w \right\} dt' \quad (5.14)$$

## 5.7 Modelos Analíticos Existentes

A tabela mostrada na Figura 39 resume diferentes regimes de fluxo, analisados por diferentes autores que utilizaram o desenvolvimento das funções fontes de fluxo uniforme desenvolvida por Gringarten e Ramey [4]. O desenvolvimento dessas soluções, suas considerações e simplificações podem ser vistas nos artigos dos autores.





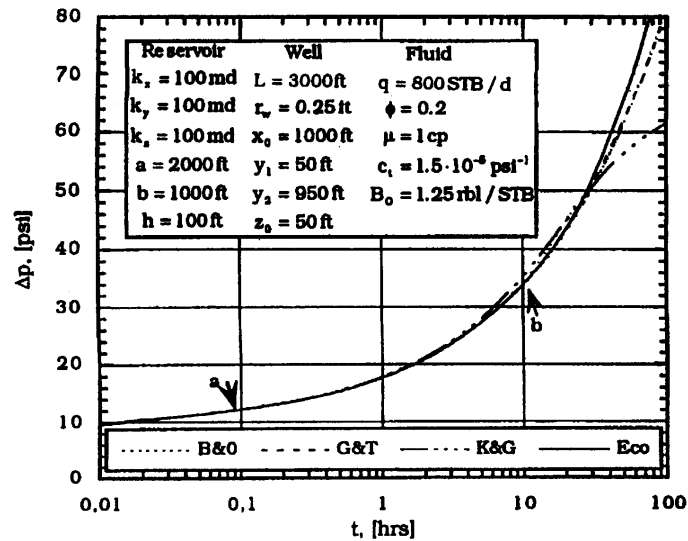
**Figura 40: Distribuição Estabilizada de Fluxo ao Longo da Parede de um Poço Horizontal**

## 5.8 Modelo Fonte Fluxo Uniforme

Carvalho[2] fez comparações em seu trabalho onde para uma determinada distância  $x$ , o modelo de fluxo uniforme comporta-se igualmente o modelo tipo condutividade infinita. Esta distância é aproximadamente  $0,7L$  conforme podemos observar na Figura 40. Outros autores também fizeram as mesmas comparações, daí o fato de uma imensa maioria de fontes tipo fluxo uniforme. No entanto, sendo teoricamente rigorosos, devemos então propor um desenvolvimento de uma função fonte tipo condutividade infinita. Isto pode ser feito utilizando-se inicialmente as funções de Green desenvolvidas neste trabalho para problemas cilíndricos finito selado e infinito.

## 5.9 Resultados

As Figuras que seguem mostram comparações para diferentes modelos analíticos desen-



**Figura 41: Reservatório Isotrópico**

volvidos onde pode-se notar os comportamentos diferentes dos mesmos. Os modelos podem assim ser identificados: "B e O" refere-se a solução de Babu e Odeh [5], "G e T" refere-se a Goode et al. [12], "K e G" refere-se a Kuchuck et al.[3] e "Eco" refere-se a Economides et al. [10].

Para um reservatório isotrópico, temos os resultados conforme Figura 41, onde "a" delimita o fim do regime de fluxo Radial Inicial e "b" delimita o início do Regime de fluxo Linear Tardio, entre "a" e "b" pode ocorrer o regime Linear Inicial e/ou o Pseudo-Radial.

Para um reservatório com poço extremamente longo, teremos a presença dos seguintes regimes de fluxo conforme pode ser visto na Figura 42. Na posição "a" temos fim do período de fluxo Radial Inicial e início do regime de fluxo Linear Inicial. Na posição "b" temos final do período de fluxo linear Inicial. Em "c" temos o início do regime Linear Tardio.

Para um reservatório com poço de pequeno comprimento, podemos observar os seguintes períodos de fluxo conforme Figura 43. "a" delimita final do regime Radial Inicial, "b" é o início do regime Pseudo-Radial, entre "a" "b" temos o regime Linear Inicial.

Para um reservatório com poço excêntrico, teremos conforme Figura 44 os seguintes períodos de fluxo representados: "a" delimita final do período Radial Inicial, "b" delimita início do Linear Inicial e entre "a" e "b" ocorrerá um período que chamamos de hemisilíndrico.

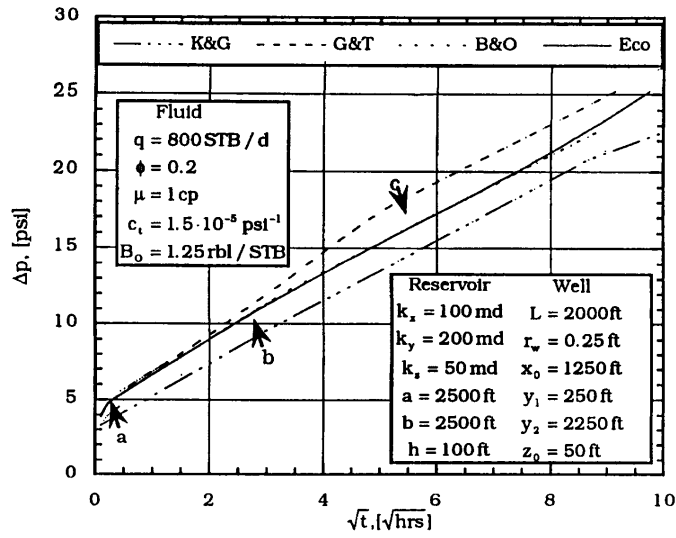


Figura 42: Reservatório com Poço Comprido

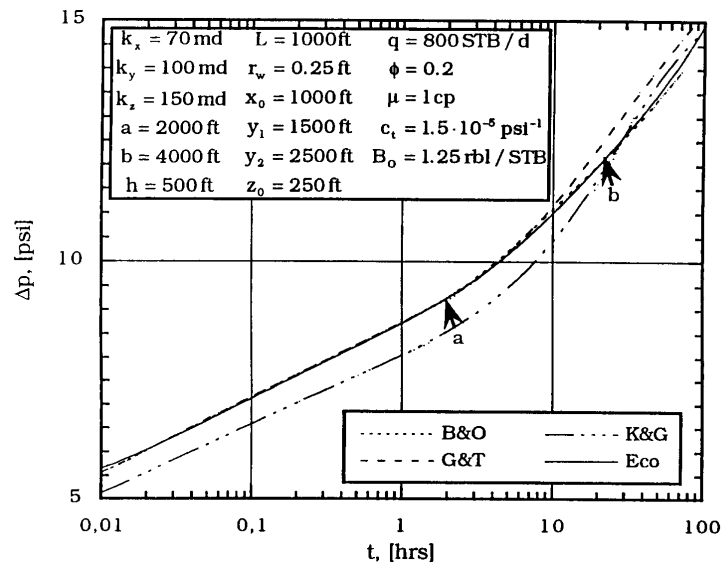


Figura 43: Reservatório com Poço de Pequeno Comprimento

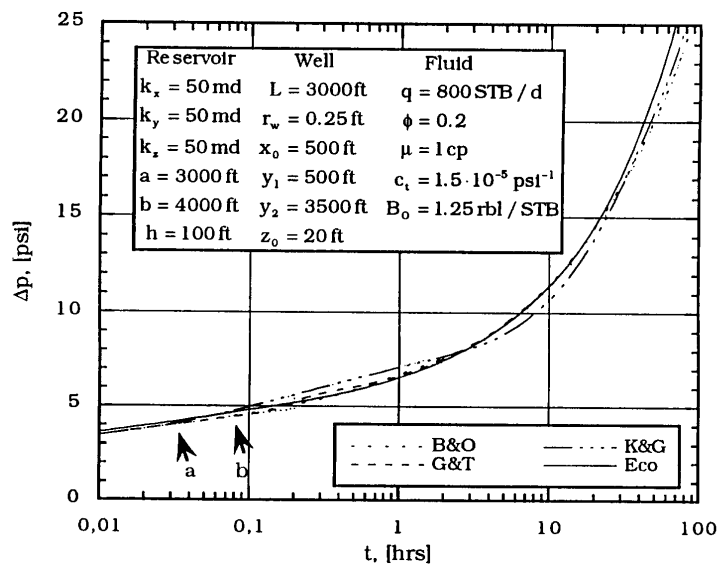


Figura 44: Poço Descentralizado

## Capítulo 6

# Conclusões e Recomendações

A equação que rege o escoamento de fluidos em um reservatório é a equação da difusividade. A solução da equação da difusividade geralmente é obtida aplicando-se transformadas integrais e/ou funções de Green instantâneas. Essas soluções geralmente são aplicadas a reservatórios mais simples. Os modelos de reservatórios mais simples comumente utilizados são: tipo bloco fechado (Paralelepípedo) ou reservatório infinito (geralmente o formato cilíndrico ou elíptico são adotados). Neste modelo foram desenvolvidas soluções para reservatório cilíndrico infinito e finito selado, utilizando funções de Green. O modelo semi-numérico desenvolvido pode facilmente ser calculado, os resultados foram comparados e validados com outras soluções analíticas e com resultados oriundos de simulação numérica. Estas comparações mais do que validar os resultados finais obtidos no cálculo das vazões e pressões, servem ainda para validar a função de Green desenvolvida que posteriormente poderá ser utilizada no cálculo de um modelo 3D.

Soluções totalmente analíticas só são possíveis para casos muito simples, com geometrias bem conhecidas, desprezando efeitos peliculares e de estocagem, considerando fluxo monofásico, reservatório isotrópico, homogêneo.

Os modelos mais complexos (anisotrópicos e heterogêneos) são tratados em muitos poucos trabalhos, sendo portanto objetivo dos trabalhos de discretização e desenvolvimento por técnicas como diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos.

Os modelos de poço geralmente utilizados são fonte cilíndrica e fonte linear. As fontes cilíndricas representam mais adequadamente o problema físico em questão, no entanto são mais trabalhosos de se resolver. O modelo fonte linear, extremamente utilizado, apresenta

condições de contorno mais simples de serem resolvidas, sendo extremamente utilizadas com as fontes fluxo instantâneo desenvolvidas por Gringarten et al[4].

Os modelos de fonte mais utilizados são fluxo uniforme e condutividade infinita. Para uma distância de fonte aproximadamente igual a  $0.7L$ , o modelo de fluxo uniforme representa com um erro pequeno a condição de condutividade infinita, o qual representa de forma mais adequada a situação física real existente na exploração com poços horizontais. No entanto, temos poucas soluções desenvolvidas para condutividade infinita .

O ponto mais importante do trabalho foi a utilização de uma metodologia de cálculo, utilizando funções de Green para reservatórios 3D com modelo de fonte tipo condutividade infinita. Este procedimento é composto do desenvolvimento da função de Green específica para a geometria e condições de contorno utilizadas, além do emprego do método dos produtos, também conhecido por método de Newman. A metodologia utilizada mostrou uma boa performance quanto a precisão dos resultados e esforço computacional.

Os modelos desenvolvidos neste trabalho são aplicados somente ao regime de fluxo radial inicial. Sugerimos portanto, um desenvolvimento para os demais regimes de fluxo utilizando o modelo de fonte tipo condutividade infinita.

As séries infinitas utilizadas no modelo 3D devem ser estudadas, simplificadas e substituídas de forma a reduzir o esforço computacional exigido para o cálculo. Uma vez desenvolvidas estas soluções para outras geometrias e condições de contorno pode-se escrever um programa que poderá ser utilizado para interpretação de teste de poço.

Outras técnicas foram utilizadas e merecem ser destacadas, entre elas o método da superposição para cálculo de pressão no poço e o método das imagens na confirmação das funções fonte unidimensionais.

Outra contribuição importante foi o desenvolvimento de um procedimento para o cálculo das raízes de uma função envolvendo termos com produtos de função de Bessel de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> espécies, até então não encontrado na literatura.

No caso de reservatórios tipo bloco fechado, as soluções desenvolvidas por Kuchuck[3], Goode[12] com Thambinaygam, Economides[10] e Babu representam adequadamente o modelo de condutividade infinita. Os últimos três utilizam funções de Green com fonte tipo fluxo uniforme.

A maioria das soluções referem-se a poços horizontais centrados no reservatório. Para casos diferentes, pode-se utilizar os fatores desenvolvidos por Economides[10] que representam o mesmo raciocínio desenvolvido por Diets para poços verticais.

## Referências Bibliográficas

- [1] Beliveau, D.,(1995), Heterogeneity, Geostatistics, Horizontal Wells, and Blackjack Poker, Artigo SPE 30745, *JPT*(Dezembro,1995),1068-1074.
- [2] Carvalho, R.S.,(1988), Comportamento de Pressão em Poços Horizontais, *Tese de Mestrado em Engenharia de Petróleo - Ouro Preto - MG*, Universidade Federal de Ouro Preto, 112 p.
- [3] Kuchuck, F.J.,(1988), Pressure Transient Analysis and Inflow Performance for Horizontal Wells, Artigo SPE 18300 apresentado na 63<sup>a</sup> Exposição e Conferência Técnica da SPE, Houston, Outubro 2-5,1988.
- [4] Gringarten et al.,(1974), The Use of Source and Green's Functions in Solving Unsteady-Flow Problems in Reservoirs, Artigo SPE 3818, Houston, 255,285-296.
- [5] Babu, D.K. e Odeh, A.S.,(1988), Productivity of a Horizontal Well, Artigo SPE 18334 apresentado na 63<sup>a</sup> Exposição e Conferência Técnica da SPE, Houston, Outubro 2-5,1988.
- [6] Cinco-Ley, H. et al.,(1978), Transient Pressure Behaviour for a Well with a Finite-Conductivity Vertical Fracture, Artigo SPE 6014, Dallas, 18(4):253-264.
- [7] Economides, M.J.,1994, Well Configurations in Anisotropic Reservoirs, Artigo SPE 27980.
- [8] Borisov, J.P.,(1964), Oil Production Using Horizontal and Multiple Deviation Wells, Nedra, Moscou.
- [9] Joshi, S.D.,(1988), Augmentation of Well Productivity with Slant and Horizontal Wells, *JPT*(Junho, 1988),729-739.
- [10] Economides, M.J. et al.,(1991), Comprehensive Simulation of Horizontal Well Performance, *SPEFE*(Dezembro, 1991),418-416.



- [11] Daviau, F. et al.,(1985), Pressure Analysis for Horizontal Wells, Artigo SPE 14251.
- [12] Goode, P.A. e Thambynayagam, R.K.M. ,(1987), Pressure Drawdown and Buildup Analysis of Horizontal Wells in Anisotropic Media, *SPEFE*(Dezembro, 1987),683-697.
- [13] Clonts, M.D. e Ramey, H.J. Jr.,(1986), Pressure Transient Analysis for the Wells with Horizontal Drainholes, Artigo SPE 15116.
- [14] Rosa, A.J. e Carvalho, R.S.,(1986), Um Modelo de Condutividade Infinita para Produção de um Poço Horizontal num Reservatório Anisotrópico, Boletim Técnico Petrobrás, Rio de Janeiro, 29(3), 211-220, jun/set 1986.
- [15] Morse, P.M., e Feshbach, H.(1953) *Methods of Theoretical Physics*.Part I Tokyo: McGraw-Hill, 997p.
- [16] Slider, H.C.(1983) *Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*. Tulsa, Oklahoma: PennWell, 826p.
- [17] Carslaw, H.S., e Jaeger, J.C.(1947) *Conduction of Heat in Solids*.London: Oxford Univ.
- [18] Stakgold, I.(1979) *Green's Functions and Boundary Value Problems*.New York: John Wiley e Sons.
- [19] Newman, A.B.,(1936), Temperature in Solids During Heating or Cooling, Ind. and Eng. Chem., Vol. 28,545.
- [20] Amado, L.C., e Wolfsteiner, C.,(1995), Analytical Models for Different Flow Regimes in Horizontal Wells, Mining University Leoben.
- [21] Spiegel, M.R.(1973) *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Coleção Schawn, McGraw-Hill, 270p.
- [22] Barreto, W.S., Amado, L.C.N., e Priimenko, V.I., A Semi-Analytical Model for the Simulation of Horizontal and Slanted Wells, Artigo SPE 38975 apresentado no LACPEC, 30 de Agosto à 3 de Setembro de 1997 no Rio de Janeiro, Brasil.
- [23] Abramowitz, M. e Stegun, I.A. (1965) *Handbook of Mathematical functions*. New York: Dover, 1046p.
- [24] Watson, G.N. (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*.Cambridge, 804p.

- [25] Titchmarsh, E.C. (1946)(1958) *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*. London: Oxford, Volumel(1946), Volumell(1958).
- [26] Van-Everdingen, A.F. e Hurst, W. (1949) *Application of the Laplace Transformations to Flow Problems in Reservoir*. TRANS-AIME.
- [27] Slider, H.C. (1976) *Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*. Petroleum Publishing Company, Tulsa, O.K., U.S.A..
- [28] Bear, J. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Medium*. Elsevier, New York.

# Apêndices

## Apêndice A

# Funções de Green

### A.1 Fórmulas de Green

Conforme Morse [15], a técnica de funções de Green, é um método fisicamente claro. Para se obter o potencial causado por uma fonte distribuída, nós calculamos o efeito de cada elemento de fonte em separado e somamos todos eles.

Definindo:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad (\text{A.2})$$

onde  $i, j, k$  são as unidades do sistema de coordenadas de Orts.

Temos que, se  $G(\vec{r}/\vec{r}_0)$  é o potencial no ponto de observação  $\vec{r}$ , causado por uma fonte potencial unitária em  $\vec{r}_0$ , então o potencial em  $\vec{r}$  causado pela distribuição de fonte  $\rho(\vec{r}_0)$  é a integral de  $G \rho$  no volume ocupado pela fonte  $\vec{r}_0$ . A função  $G$  é chamada de Função de Green.

A dificuldade, no entanto, é encontrar a função de Green apropriada a cada problema com a geometria e condições de contorno específicas. No caso da equação da difusividade, o problema se reduz à equação de Helmholtz, que deriva a equação da difusividade, após a separação de variáveis. Considerando a resolução da equação de Helmholtz em uma região  $\mathcal{D}$  do espaço tridimensional, limitada por superfícies suaves  $\mathcal{S}$ , e exigindo que a função procurada  $\psi(\vec{r})$  satisfaça sobre  $\mathcal{S}$  certas condições de contorno, temos que, da identidade vetorial:

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \chi) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \chi + \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \chi \quad (\text{A.3})$$

Integrando em  $\mathcal{D}$ , considerando  $dV = dx dy dz$ , teremos:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \chi) dV = \iiint_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \chi) dV + \iiint_{\mathcal{D}} (\varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \chi) dV \quad (\text{A.4})$$

Da identidade

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \chi = \nabla^2 \chi \quad (\text{A.5})$$

Aplicando-se o teorema da divergência, temos:

$$\oint_S F \cdot \vec{n} dA = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} F dV \quad (\text{A.6})$$

Logo, o primeiro termo da expressão (A.4) será:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \chi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right) \cdot dS \quad (\text{A.7})$$

Reescrevendo a expressão (A.4) temos:

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \chi) dV + \iiint_{\mathcal{D}} (\varphi \nabla^2 \chi) dV = \oint_S \varphi \left( \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right) \cdot dS \quad (\text{A.8})$$

conhecida como primeira fórmula de Green.

Da 1ª fórmula de Green temos, trocando-se as posições relativas  $\varphi$  e  $\chi$ :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \chi \cdot \operatorname{grad} \varphi) dV + \iiint_{\mathcal{D}} (\chi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \chi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) \cdot dS \quad (\text{A.9})$$

Subtraindo a 1ª fórmula de Green, temos:

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\chi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \chi) dV = \oint_S \left( \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (\text{A.10})$$

conhecida como segunda fórmula de Green.

## Apêndice B

# Funções de Green para Reservatório Cilíndrico Infinito

Definindo  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$  sendo  $i$  e  $j$ , as unidades de Orts do sistema de coordenadas cartesiano no plano, construiremos a função de Green específica para o problema, reservatório infinito, quando uma fonte pontual impulsiva não depende da variável ângulo. Sendo assim, podemos considerar o nosso problema no sistema de coordenadas polares  $(r, \varphi)$ :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (\text{B.1})$$

e assim teremos a seguinte representação para a fonte pontual impulsiva:

$$4\pi \delta(t - t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 4\pi \frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r} \delta(t - t_0) \quad (\text{B.2})$$

Então, no sistema de coordenadas polar, quando temos uma fonte impulsiva, o problema da determinação da função de Green para a equação da difusividade no domínio  $\mathcal{D} = \{(\vec{r}) | r \geq r_w, t \in R\}$  com condições iniciais e de contorno homogêneas será:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{\partial G}{\partial t} = -2 \frac{\delta(r - r_0) \delta(t - t_0)}{r} \quad (\text{B.3})$$

$$G = 0 \quad \text{para} \quad t < t_0 \quad (\text{B.4})$$

$$G = 0 \quad \text{para} \quad r = r_w \quad (\text{B.5})$$

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} G = 0 \quad (\text{B.6})$$

isto é:  $G$  é a função dependente das variáveis  $r, t, r_0, t_0$ :

$$G = G(r, t | r_0, t_0) \quad (\text{B.7})$$

Para determinação de  $G$ , considere a transformada de Weber (Conforme Titchmarsh [25]) com respeito a variável  $r$ :

$$\bar{G}(\lambda, \cdot) = \int_a^\infty G(r, \cdot) r \varphi_\lambda(r) dr \quad (\text{B.8})$$

onde:

$$\varphi_\lambda(r) = J_0(\lambda r_w) Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r) Y_0(\lambda r_w) \quad (\text{B.9})$$

De acordo com as propriedades da transformada de Weber, as expressões (B.3) a (B.6) ficam reduzidas a:

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{G}}{dt} + \lambda^2 \bar{G} &= -4\pi \int_a^\infty \frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r} \varphi_\lambda(r) dr \delta(t - t_0) = \\ &= -2\delta(t - t_0) \varphi_\lambda(r_0) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$G = 0 \quad \text{para} \quad t < t_0 \quad (\text{B.11})$$

Consequentemente, para as expressões (B.10) e (B.11), temos:

$$\bar{G}(\lambda, t, r_0 | r_0, t_0) = 2\varphi_\lambda(r_0) \exp^{-\lambda^2(t-t_0)} \theta(t - t_0) \quad (\text{B.12})$$

onde  $\theta(t - t_0)$  é a função de Heaviside:

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Aplicando a transformada inversa de Weber à função  $\bar{G}(\cdot)$ :

$$G(r, t, r_0, t_0) = 2\theta(t - t_0) \int_0^\infty \frac{\exp^{-\lambda^2(t-t_0)} \varphi_\lambda(r_0) \varphi_\lambda(r) \lambda d\lambda}{(J_0^2(\lambda r_w) + Y_0^2(\lambda r_w))} \quad (\text{B.14})$$

que representa a função de Green para o problema definido nas expressões (B.3) a (B.6).

## Apêndice C

# Funções de Green para Reservatório Cilíndrico Selado

Nós agora vamos construir a função de Green para outro exemplo específico, no caso quando uma fonte pontual impulsiva não depende da variável ângulo. Para determinar a função de Green para equação da difusão no domínio  $\mathcal{D} = \{\bar{r}, t | r_w \leq r \leq r_{ext}, t \in \mathcal{R}\}$ , vamos considerar nossas equações no sistema de coordenadas polares, como no exemplo reservatório infinito.

Neste exemplo consideraremos a função de Green para equação da difusão com fonte pontual impulsiva, a qual não depende da variável ângulo no domínio  $\mathcal{D}$ :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) - \frac{\partial G}{\partial t} = -2 \frac{\delta(r - r_0) \delta(t - t_0)}{r} \quad (\text{C.1})$$

satisfazendo as condição inicial homogênea:

$$G = 0 \quad \text{para } t < t_0 \quad (\text{C.2})$$

e condições de contorno:

$$G = 0 \quad \text{para } r = r_w \quad (\text{C.3})$$



$$\frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (C.4)$$

isto é,  $G$  é a função dependente das variáveis  $r, t, r_0, t_0$ :

$$G = G(r, t | r_0, t_0) \quad (C.5)$$

Neste caso a função de Green pode ser representada em termos de auto-funções (Ver Morse [15]), para o problema de Sturm-Liouville associado ao problema original (Conforme expressões (C.1) a (C.4)). Sendo assim, podemos representar a solução do problema na forma:

$$G(r, t | r_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, t_0) \frac{R_n(r) R_n(r_0)}{\|R_n\|^2}, \quad (C.6)$$

sendo;

$$\|R_n\|^2 = \int_{r_w}^{r_{ext}} R_n^2(r) r dr \quad (C.7)$$

onde as funções  $R_n(r)$  são a solução do seguinte problema de Sturm-Liouville:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\lambda^2}{2} R = 0, \quad 0 < r < r_{ext} \quad (C.8)$$

$$R = 0 \quad \text{para } r = r_w \quad (C.9)$$

$$\frac{dR}{dr} = 0 \quad \text{para } r = r_{ext} \quad (C.10)$$

A equação (C.8) é a equação de Bessel de ordem zero e tem solução comum:

$$R(r) = A J_0\left(\frac{\lambda r}{r_{ext}}\right) + B Y_0\left(\frac{\lambda r}{r_{ext}}\right) \quad (C.11)$$

Aplicando as condições de contorno, conforme expressões (C.9) e (C.10), temos as equações para determinação de "A" e "B":

$$A J_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) + B Y_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) = 0 \quad (C.12)$$

$$A J_1(\lambda) + B Y_1(\lambda) = 0 \quad (\text{C.13})$$

Mas para determinar a solução não-trivial do problema, conforme expressões (C.8) a (C.10), o determinante do sistema anterior tem que ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} J_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) & Y_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) \\ J_1(\lambda) & Y_1(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.14})$$

Desenvolvendo, temos:

$$J_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) Y_1(\lambda) - Y_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) J_1(\lambda) = 0 \quad (\text{C.15})$$

Fazendo  $A = -Y_1(\lambda)$  e  $B = J_1(\lambda)$ :

$$R(r) = J_1(\lambda) Y_0\left(\frac{\lambda r}{r_{ext}}\right) - Y_1(\lambda) J_0\left(\frac{\lambda r}{r_{ext}}\right) \quad (\text{C.16})$$

Para determinação dos auto-valores  $\lambda_n$ , temos a seguinte condição:

$$\lambda_n : R(r_w) = J_1(\lambda) Y_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) - Y_1(\lambda) J_0\left(\frac{\lambda r_w}{r_{ext}}\right) = 0 \quad (\text{C.17})$$

Considerando as raízes positivas de  $\lambda_n$  conforme expressão (C.17), temos que as funções abaixo formam o conjunto completo das auto-funções do problema de Sturm-Liouville descrito nas expressões (C.8) a (C.10).

$$R_n(r) = J_1(\lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_{ext}}\right) - Y_1(\lambda_n) J_0\left(\frac{\lambda_n r}{r_{ext}}\right) \quad (\text{C.18})$$

A função  $\frac{\delta(r-r_0)}{r}$  pode ser representada da seguinte forma (Ver Morse [15] p.864):

$$\frac{\delta(r-r_0)}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r) R_n(r_0)}{\|R_n\|^2} \quad (\text{C.19})$$

Então a determinação da função de Green  $G_n(t, t_0)$ , se reduz a uma simples equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dG_n}{dt} + \frac{\lambda_n^2}{r_{ext}^2} G_n = 4\pi \delta(t-t_0), \quad n \in N \quad (\text{C.20})$$

onde

$$G_n(t - t_0) = 4\pi \exp\left(\frac{\lambda_n^2 (t - t_0)}{r_{ext}^2}\right) \theta(t - t_0) \quad (\text{C.21})$$

Logo, a função de Green para o problema descrito nas expressões (C.1) a (C.4) será:

$$G(r, t|r_0, t_0) = 2 \theta(t - t_0) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{\lambda_n^2 (t - t_0)}{r_{ext}^2}\right) \frac{R_n(r) R_n(r_0)}{\|R_n\|^2} \quad (\text{C.22})$$

## Apêndice D

# Cálculo das Raízes

O cálculo de raízes envolvendo funções de Bessel é algo que dependendo da função requer um procedimento cuidadoso. Isto se deve ao comportamento oscilante das funções de Bessel já discutido anteriormente. Abramowitz[23], Watson[24], Titchmarsh[25] e outros autores tabelaram algumas raízes, para alguns valores de  $\lambda$ . Muitos deles apresentam expressões para o cálculo de raízes grandes (As primeiras raízes são excluídas) para  $\lambda > 1$ . No entanto para  $\lambda < 1$  que é o caso em questão, pois  $\lambda = \frac{1}{r_{de}}$  não encontramos valores disponíveis tabelados para um valor arbitrário de  $\lambda$ , nem tão pouco expressões para o cálculo das mesmas. Este procedimento calcula raízes positivas para a expressão (D.1), seja qual for o valor de  $\lambda$ .

$$f(x) = J_1(x)Y_0(\lambda x) - Y_1(x)J_0(\lambda x) = 0 \quad (\text{D.1})$$

De acordo com o método de Newton, podemos encontrar as raízes de  $f(x)$ , da seguinte forma:

$$x_n^{k+1} = \frac{f(x_n^k)}{f'(x_n^k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.2})$$

onde  $x_n^0$  é a aproximação inicial para o cálculo da  $n$ 'ésima raiz de  $f(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Então para  $f(x)$ , temos a seguinte representação:

$$f(x) = \frac{2}{\pi x \sqrt{\lambda}} \cos\left((\lambda + 1)x - \frac{\pi}{2}\right) + O(x^{-2}) \quad (\text{D.3})$$

Para grandes valores de  $x$  e para  $\lambda > 1$ .

Para grandes valores de  $x$ , temos as expansões assintóticas das funções de Bessel na forma (Ver Abramowitz[23]):

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \\
 J_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \\
 Y_1(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \\
 Y_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{D.4}$$

Então:

$$\frac{J_1(x)}{Y_1(x)} \approx -tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)
 \tag{D.5}$$

e

$$\frac{J_0(x)}{Y_0(x)} \approx ctg\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)
 \tag{D.6}$$

Então, para a expressão (D.2), temos:

$$-tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \approx ctg\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)
 \tag{D.7}$$

Das identidades trigonométricas:

$$tg(\lambda) = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right);
 \tag{D.8}$$

$$-tg(x) = tg(-x).
 \tag{D.9}$$

Substituídas na expressão (D.7), temos:

$$ctg\left(-x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \approx ctg\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)
 \tag{D.10}$$

Então, para grandes raízes de  $x$  e  $\lambda > 1$ , temos:

$$x_n^0 = \frac{\pi}{1 + \lambda} n
 \tag{D.11}$$

Para  $n$  temos:

$$\begin{cases} x_n^0 & \sim \frac{\pi}{1+\lambda}n \\ x_n^k + 1 & = x_1^k - \frac{f(x_1^k)}{f'(x_1^k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

onde:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= [\dot{J}_1(x) Y_0(\lambda x) - \lambda J_1(x) Y_1(\lambda x) + \\ &+ \lambda J_1(\lambda x) Y_1(x) - J_0(\lambda x) \dot{Y}_1(x)] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

De acordo com as propriedades das Funções de Bessel descritas por Spiegel[21], temos que:

$$J_1(x) = \frac{1}{2}J_0(x) - J_2(x) \quad (\text{D.14})$$

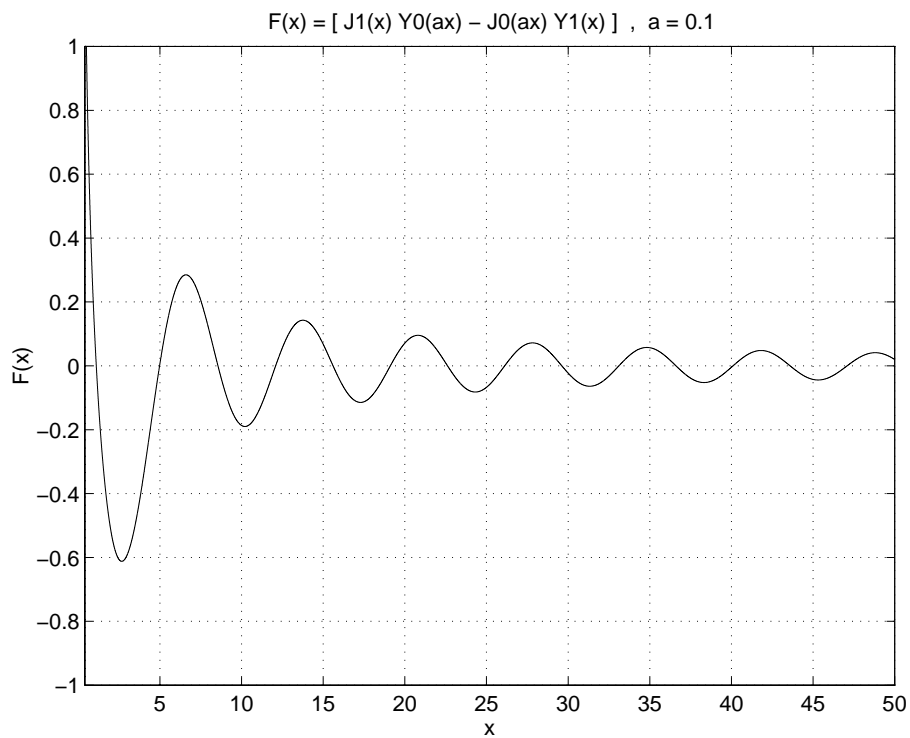
$$Y_1(x) = \frac{1}{2}Y_0(x) - Y_2(x) \quad (\text{D.15})$$

$$(\text{D.16})$$

Devido ao comportamento oscilatório da função, para alguns valores de  $\lambda$ , a 1ª aproximação  $x_0$  não é adequada, pois não garante que todas as raízes serão encontradas e a ordem das raízes encontradas pode ser diferente da sequência real.

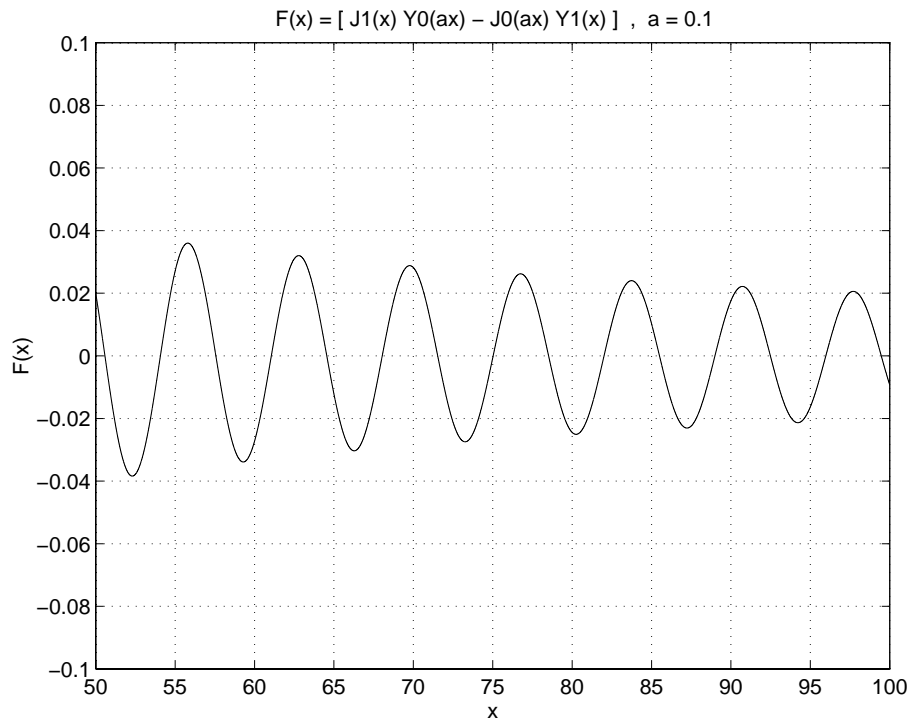
Para  $\lambda \geq 2.5$ , a estimativa inicial conforme expressão (D.11) funciona adequadamente, no entanto, para valores de  $\lambda < 2.5$  se faz necessário uma outra aproximação inicial. Como estamos interessados em valores para  $r_{de} > 1$  ou seja  $\lambda < 1$ , foi necessário desenvolver um procedimento diferente do apresentado anteriormente para o cálculo das raízes.

A alternativa foi escolher como estimativa inicial alguns valores de  $x$ , calcular a função nestes pontos e verificar a existência de raízes. Por exemplo: Se  $x = x_i$  e  $x = x_{i+1}$  são escolhidos, então se  $f(x_i) * f(x_{i+1}) < 0$ , há pelo menos uma raiz entre  $x = x_i$  e  $x = x_{i+1}$ . A questão então, é refinar o mínimo possível de forma a garantir que todas as raízes existentes no intervalo considerado sejam encontradas. Para o problema em questão, verificamos graficamente que o intervalo unitário serve como boa aproximação inicial. Para os intervalos unitários entre  $x = 0$  e  $x = x_f$  pode-se calcular o valor das funções e verificar a existência de raiz em cada intervalo. Caso exista a raiz dentro de um intervalo qualquer, usa-se um dos limites deste valor como chute inicial para iteração e cálculo da raiz conforme método de Newton descrito anteriormente.

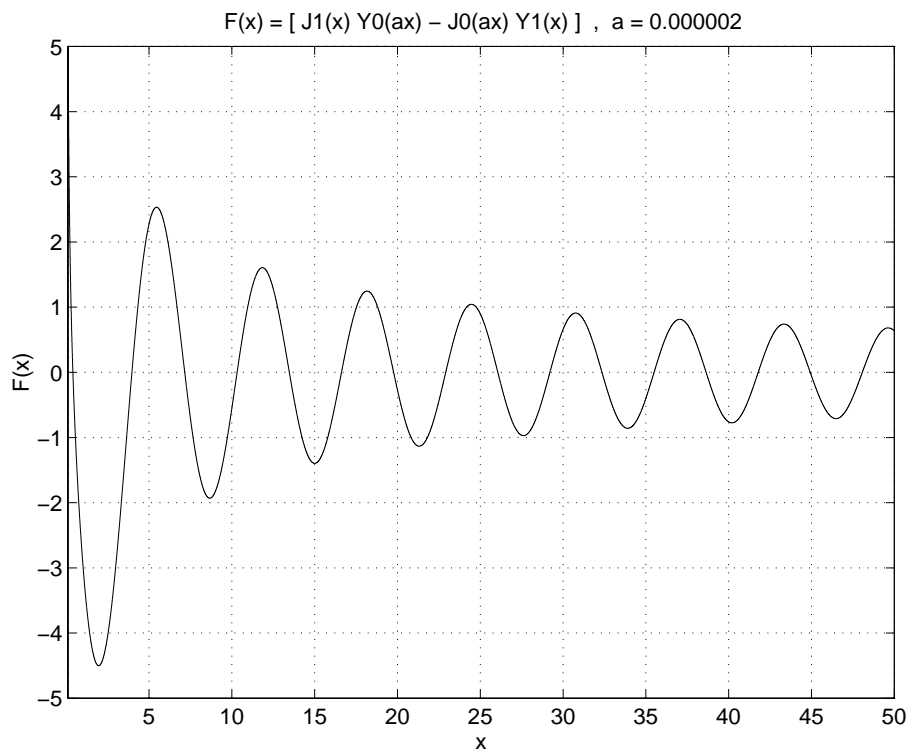


**Figura 45: Evolução de  $f(x)$  para  $\lambda = a = 0.1$**

A Tabela apresentada na Figura 49 mostra algumas raízes de  $f(x)$  conforme expressão (D.1) para alguns valores de  $\lambda$ . As Figuras 45, 46, 47 e 48 representam a evolução da função  $f(x)$  para  $\lambda = 0.1$  e confirmam as raízes mostradas na Tabela.



**Figura 46: Evolução de  $f(x)$  para  $\lambda = a = 0.1$**



**Figura 47: Evolução de  $f(x)$  para  $\lambda = a = 0.000002$**



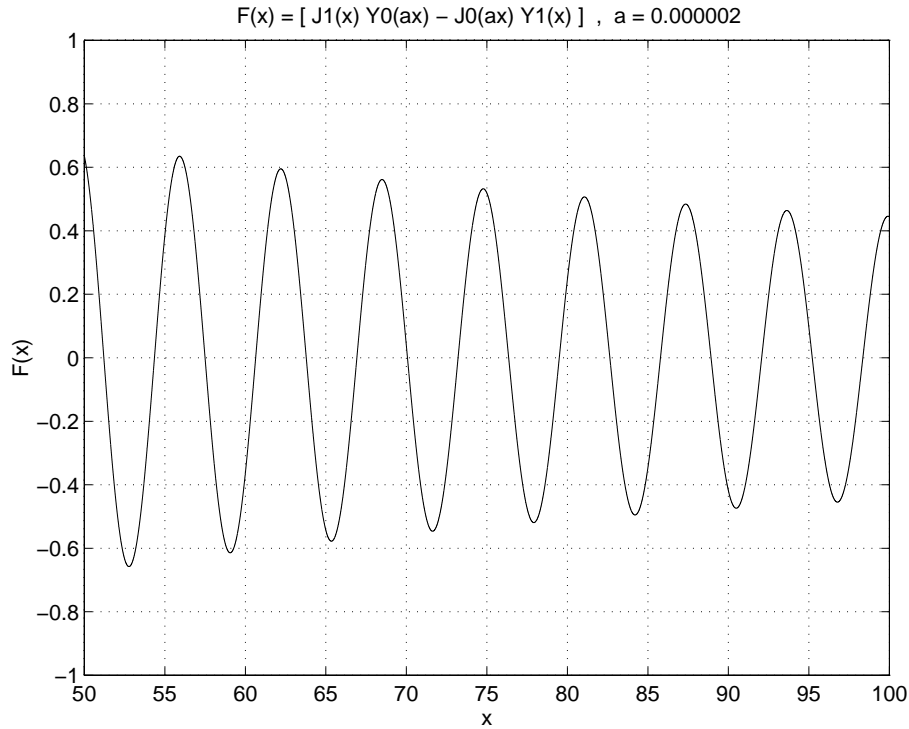


Figura 48: Evolução de  $f(x)$  para  $\lambda = a = 0.000002$

Raízes de  $F(x) = [J_1(x)Y_1(x/Rde) - Y_1(x)J_1(x/Rde)]$

Rde	Lambda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0.1	1.1026943	4.9788419	8.5542853	12.0868040	15.6029010	19.1107400	22.6137960	26.1138210	29.6118030	33.1063420
50	0.02	0.7894509	4.3963820	7.6903255	10.9450930	14.1842460	17.4149800	20.6404430	23.8623010	27.0815410	30.2988000
100	0.01	0.7166906	4.2899470	7.5463953	10.7663130	13.9720000	17.1700730	20.3633760	23.5533970	26.7410140	29.9267920
500	0.002	0.6034770	4.1484199	7.3658046	10.5511760	13.7249090	16.8926910	20.0568570	23.2185840	26.3785480	29.5371730
1000	0.001	0.5687979	4.1108958	7.3202767	10.4989140	13.6666660	16.8289650	19.9880040	23.1448740	26.3001910	29.4543390
5000	0.0002	0.5068182	4.0504310	7.2491502	10.4190700	13.5792710	16.7347920	19.8876070	23.0386710	26.1885140	29.3374560
10000	0.0001	0.4857067	4.0317189	7.2277098	10.3954500	13.5538060	16.7077020	19.8590490	23.0087640	26.1573520	29.3051150
50000	0.00002	0.4453381	3.9985232	7.1903463	10.3548010	13.5104110	16.6619180	19.8111310	22.9589030	26.1056970	29.2517870
100000	0.00001	0.4018650	3.9664663	7.1550840	10.3170410	13.4705990	16.6203470	19.7680090	22.9143850	26.0599050	29.2048180
500000	0.000002	0.3910794	3.9590909	7.1470850	10.3085580	13.4617220	16.6111350	19.7585030	22.9048180	26.0499000	29.1945960

Rde	Lambda	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	0.1	36.603824	40.098509	43.592578	47.086161	50.579356	54.072233	57.564849	61.057248	64.549463	68.041521
50	0.02	33.514511	36.728983	39.942444	43.155066	46.366982	49.578300	52.789103	55.999460	59.209429	62.419056
100	0.01	33.111115	36.294259	39.476427	42.657774	45.838422	49.018468	52.197988	55.377049	58.555702	61.733992
500	0.002	32.694742	35.851454	39.007457	42.162861	45.317752	48.472196	51.626249	54.779956	57.933354	61.086474
1000	0.001	32.607572	35.760069	38.911957	42.063334	45.214274	48.364835	51.515066	54.665004	57.814682	60.964126
5000	0.0002	32.485706	35.633408	38.780664	41.927550	45.074122	48.220427	51.366500	54.512368	57.658056	60.803584
10000	0.0001	32.452249	35.598887	38.745126	41.891034	45.036665	48.182058	51.327247	54.472258	57.617111	60.761824
50000	0.00002	32.397349	35.542500	38.687325	41.831882	44.976216	48.120363	51.264349	54.408196	57.551922	60.695540
100000	0.00001	32.349284	35.493406	38.637259	41.780895	44.924352	48.067660	51.210841	54.353915	57.496895	60.639794
500000	0.000002	32.338859	35.482793	38.626469	41.769937	44.913235	48.056392	51.199430	54.342365	57.485213	60.627983

Rde	Lambda	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
10	0.1	71.533446	75.025255	78.516963	82.008584	85.500127	88.991602	92.483016	95.974375	99.465696	102.956950
50	0.02	65.628381	68.837439	72.046258	75.254862	78.463274	81.671511	84.879590	88.087526	91.295390	94.503014
100	0.01	64.911959	68.089634	71.267045	74.444217	77.621172	80.797927	83.974500	87.150905	90.327155	93.503282
500	0.002	64.239344	67.391985	70.544417	73.696658	76.848723	80.000624	83.152375	86.303985	89.455463	92.606819
1000	0.001	64.113359	67.262399	70.411264	73.559969	76.708525	79.856944	83.005237	86.153410	89.301474	92.449434
5000	0.0002	63.948968	67.094221	70.239355	73.384382	76.529309	79.674144	82.818896	85.963568	89.108168	92.252700
10000	0.0001	63.906412	67.050887	70.195260	73.339540	76.483735	79.627851	82.771895	85.915873	89.059788	92.203645
50000	0.00002	63.839063	66.982501	70.125862	73.269154	76.412382	79.555552	82.698670	85.841738	88.984761	92.127742
100000	0.00001	63.782620	66.925383	70.068088	73.210742	76.353350	79.495915	82.638442	85.780934	88.923393	92.065822
500000	0.000002	63.770686	66.913329	70.055919	73.198461	76.340990	79.483420	82.625844	85.768235	88.910597	92.052931

Figura 49: Raízes de  $f(x)$